REZOLVARE

1. Se obține suma egală cu $3+6=9$.
2. Condiția $3x+4>0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3},\infty\right)$; ecuația devine $3x+4=25 \Rightarrow x=7 \in \left(-\frac{4}{3};\infty\right)$.
3. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$.
4. $f(1)=-1$, $V(0;0)$ punct de maxim $\Rightarrow f(x) \leq f(0)=0 \Rightarrow f(x) \in [-1,0]$.
5. $\overline{AB}=(-1-2)\vec{i}+(3+1)\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow a=-3, b=4$.
6. Se aplică teorema cosinusului în triunghiul ABC: $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle B)=30^\circ$.

REZOLVARE

1. Deoarece $f(3)=0$ rezultă că produsul este egal cu 0.
2. Condiții $x+2>0$ și $x>0 \Rightarrow x\in(0,\infty)$. Ecuația devine $x^2+2x=8$ cu soluția $x=2$.
3. Inecuația se scrie $x^2-5x+4\le 0 \Rightarrow x\in[1,4]\cap\mathbb{Z}=\{1,2,3,4\}$.
4. $\dfrac{3^x-1+5\cdot 3^x+1}{2}=3^{x+1}$, deci numerele sunt în progresie aritmetică, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.
5. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(4\vec{i}-8\vec{j}\right)+\left(6\vec{i}+3\vec{j}\right)=10\vec{i}-5\vec{j}$. Vectorul $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ are coordonatele $(10,-5)$.
6. Aria $\Delta ABC=\dfrac{AC\cdot AB\cdot\sin A}{2}=2$.

REZOLVARE

1. Șirul este o progresie aritmetică de rație $r = 6 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r = 55.$
2. Există 2^3 numere naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1, 2\}$. Dintre acestea sunt divizibile cu 3 numerele 111 şi 222. Probabilitatea este egală cu 0,25.
3. Condiția $x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$
4. $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) = -3 - 1 + 1 + 3 = 0.$
5. Ecuația dreptei $AB : x - y - 3 = 0.$
6. Aria $\Delta ABC = \dfrac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2} = \dfrac{1}{2}.$

REZOLVARE

1. Inecuația se scrie $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow x \in (-2,3) \cap \mathbb{Z} = \{-1,0,1,2\}$.
2. Rația este egală cu 2. $a_5 = 9$, $S_5 = 25$.
3. Condiția $m < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$. Valoarea maximă a funcției este egală cu $-\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 64 + 12m = -20m \Rightarrow m = -2$.
4. Condiția $x \in (5, \infty)$. Ecuația se scrie $\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 8 \Rightarrow x = 6$.
5. Vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \Rightarrow a = -4$.
6. Se aplică teorema sinusurilor $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow R = 3$.

REZOLVARE

1. $A=[-3;1]\cap\mathbb{Z}$ adică numărul elementelor mulțimii este 5.

2. În mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$ singurele cuburi perfecte sunt 1, 8 şi 27, deci probabilitatea este $\frac{3}{30}=0,1$.

3. Ecuația devine $8x+8=0\Rightarrow x=-1$.

4. $x=400$.

5. $5\vec{u}+3\vec{v}=-15\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{i}-3\vec{j}=7\vec{j}$ **.** Coordonatele vectorului sunt $(0,7)$.

6. $BC = 2\cdot AD = 10$. Se aplică teorema lui Pitagora în $\triangle ABC$: $AB^2=BC^2-AC^2=64\Rightarrow AB=8$.

REZOLVARE

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-6=10.$

2. Se rezolvă sistemul $\begin{cases} y=x^2-x+1 \\ y=x+4 \end{cases} \Rightarrow x^2-x+1=x+4 \Rightarrow x_1=-1, x_2=3 \Rightarrow y_1=3, y_2=7$.

Coordonatele cerute sunt $(-1,3)$ şi $(3,7)$.

3. Deoarece $\lg\sqrt{x}+\lg x=2\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow \lg x\sqrt{x}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^3=10^3 \Rightarrow \sqrt{x}=10 \Rightarrow x=100$.

3. $\frac{3^x-1+5\cdot 3^x+1}{2}=2\cdot 3^{x+1}$, deci numerele sunt în progresie aritmetică.

4. Singurele numere raționale din mulțimea A sunt $\sqrt{4}$ şi $\sqrt{9}$. Probabilitatea este egală cu $\frac{2}{9}$.

5. Din condiția de paralelism a dreptelor $\frac{2}{a}=-\frac{1}{2}\neq\frac{3}{5}$ rezultă $a=-4$.

6. Deoarece $AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic în A, deci $\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

REZOLVARE

1. Deoarece $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$.

2. Inecuația se scrie $2 - 8x \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

3. Ecuația devine $3^{x-2} = 3^{-\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{x}$, dar $x \geq 0$ și $x \leq 2$, adică $x \in [0;2]$, deci $x = 1$.

4. $3 - 3 = 0$.

5. $AB \| CD \Leftrightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow m_{AB} = -a - 1, m_{CD} = 2 \Rightarrow a = -3$.

6. Se aplică teorema cosinusului în $\triangle ABC \Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{5}$.

REZOLVARE

1. $S = \dfrac{(1+13)\cdot 7}{2} = 49$.
2. $f(x) = x \Rightarrow 2x+1 = x \Rightarrow x = -1$. Punctul cerut are coordonatele $(-1,-1)$.
3. Ecuația se scrie $2^x + 8\cdot 2^x = 36 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.
4. $4! + 1 = 25$.
5. Panta dreptei este egală cu -2, deci ecuația dreptei este $y-1 = -2(x-1) \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$.
6. Deoarece $\sin 130^\circ = \sin\left(180^\circ - 50^\circ\right) = \sin 50^\circ \Rightarrow \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$.

REZOLVARE

1. $\log_3 9 = 2$, $\log_2 8 = 3$ și $\log_4 \frac{1}{4} = -1$, de aici concluzia.

2. $\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$.

3. $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 2\}$.

4. Rata dobânzii este 8 % .

5. $x_B - 3 = 1 \Rightarrow x_B = 4$, $y_B - 4 = 1 \Rightarrow y_B = 5$.

6. $A_{ABCD} = \frac{9}{2}$.

REZOLVARE

1. $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \cdot \frac{1}{3^3} = 1$.

2. Ecuația devine $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$.

3. Se notează $2^x = t > 0$ și se rezolvă ecuația în t, $t^2 - 3t + 2 = 0$; obținem $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Atunci $S = \{0, 1\}$.

4. $a = b = 8$.

5. $\vec{w} = 2(3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) \Rightarrow \vec{w}(0, 17)$.

6. Aria $\triangle ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = 15 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$.

REZOLVARE

1. $5+120=125.$

2. Suma este egală cu $\frac{121}{81}$.

3. Se obține $3ax+3b+2=3x+5, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow a=b=1.$

4. Condiții : $x^2-2x>0$ și $2x-3>0 \Rightarrow x\in(2,+\infty).$ Se rezolvă ecuația $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=3.$

5. $AB \parallel CD \Leftrightarrow m_{AB}=m_{CD}$, $m_{AB}=\frac{1}{2}$, $m_{CD}=\frac{a-5}{2} \Rightarrow a=6$.

6. Se aplică teorema sinusurilor în $\triangle ABC \Rightarrow \frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=4\sqrt{2}$.

REZOLVARE

1. Deoarece $f(-5)=0$, produsul din enunț este egal cu 0.
2. Ecuația devine $n^2-n-56=0 \Rightarrow n=8$.
3. $\log_3 2^3+\log_3 2^2+\log_3 25-\log_3 25=5a$.
4. Deoarece $x^2+x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$, după aducerea la acelaşi numitor şi efectuarea calculelor, inecuația devine $x^2-x-2 \le 0 \Rightarrow x \in [-1,2]$.
5. Panta dreptei AB este egală cu 1.Ecuația dreptei AB este $y-3=x-2 \Rightarrow x-y+1=0$.
6. Aria $\triangle ABC=\dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}=6 \Rightarrow \sin B=\dfrac{1}{2}$.

REZOLVARE

1. Numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente ce se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ este egal cu $C_5^2 = 10$.
2. Ecuația se scrie $f(x)+g(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x=0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$.
3. Condiție: $x \neq 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow x \in \{5,-1\}$.
4. Condiție: $\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$.
5. $AB = 5 \Rightarrow$ Aria $\triangle ABC = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.
6. $\cos x = \frac{3}{5}$.

REZOLVARE

1. Ecuația are două soluții reale distincte deoarece $\Delta = 1 > 0$.
2. Deoarece $f(6) = 0$ produsul este egal cu 0.
3. $7 \cdot 2^x = 28 \Rightarrow x = 2$.
4. $6 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 0$.
5. Lungimea segmentului $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$.
6. Se aplică teorema cosinusului în triunghiul $ABC \Rightarrow AC^2 = 12$. Perimetrul $\triangle ABC = 6 + 2\sqrt{3}$.

REZOLVARE

1. Numărul submulțimilor cu câte k elemente ale unei mulțimi finite cu n elemente, $0 \le k \le n$ este $C_n^k \Rightarrow C_4^2 = 6$.
2. Ecuația se scrie $5^{3x} = 5^{-1} \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$.
3. Condiție: $\Delta \le 0 \Rightarrow 1 - 4m \le 0 \Rightarrow m \ge \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.
4. $2 \cdot 4^x = 3 \cdot 2^x + 2.$ Notând $2^x = t > 0,$ se rezolvă ecuația $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2.$ Deci $x = 1.$
5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
6. Se aplică teorema cosinusului în triunghiul $ABC \Rightarrow BC^2 = 21 \Rightarrow$ Perimetrul $\triangle ABC = 9 + \sqrt{21}$.

REZOLVARE

1. $C_8^3 - C_8^3 = 0.$
2. Condiție $x+5>0 \Rightarrow x \in (-5,\infty)$; $x+5=8 \Rightarrow x=3$.
3. Se notează $x_1 + x_2 = S, x_1 \cdot x_2 = P$. Deoarece $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$.
4. Deoarece $f(0)=2 \Rightarrow f(2) - f(2) = 0.$
5. Punctul B este mijlocul segmentului $AC \Rightarrow -2 = \frac{x_C + 5}{2}$ şi $1 = \frac{y_C + 4}{2} \Rightarrow C(-9,-2)$.
6. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci lungimea înălțimii din A este egală cu $\frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$.

REZOLVARE

1. $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = 4\log_3 2 - 4\log_3 2 = 0$.

2. Ecuația se scrie $\frac{2^x}{2} + 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

3. Ecuația se scrie $2n = 10 \Rightarrow n = 5$.

4. Funcția *f* este descrescătoare pe [0,2], $f(0) = 3,\ f(2) = -5 \Rightarrow f(x) \in [-5, 3]$.

5. Fie *D* mijlocul segmentului *BC*, atunci $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = \vec{0}$.

6. $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

REZOLVARE

1. $\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 - \log_2 3 = 0.$

2. Deoarece $5! = 120,\ 4! = 24 \Rightarrow$ probabilitatea este egală cu $\frac{5}{6}$.

3. Se notează $2^x = t > 0.$ Ecuația devine $t^2 + 5t - 14 = 0 \Rightarrow t = 2,$ deci $x = 1.$

4. Deoarece $\Delta 4\sin^2 a - 4\left(1 - \cos^2 a\right) = 4\sin^2 a - 4\sin^2 a = 0 \Rightarrow$ ecuația admite soluții reale egale, $\forall a \in \mathbb{R}.$

5. $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{i} + 10\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \alpha = \beta = 1.$

6. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiul $ABC \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} = 1.$

REZOLVARE

1. $\log_6 24 - \log_6 4 = \log_6 6 = 1.$

2. $f(1) = 0,$ deci produsul este egal cu 0.

3. Condiție: $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \in [5, \infty).$ Din $x - 5 = 4 \Rightarrow x = 9.$

4. $\dfrac{(n-5)!(n-4)(n-3)}{(n-5)!} = 6 \Rightarrow (n-4)(n-3) = 6 \Rightarrow n^2 - 7n + 6 = 0 \Rightarrow n = 6$.

5. $AB = \sqrt{(5-a)^2 + (2+a)^2} = 5 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$, deci $S = \{1, 2\}$.

6. $\sin 135^\circ = \sin\left(180^\circ - 45^\circ\right) = \sin 45^\circ \Rightarrow \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1.$

REZOLVARE

1. $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3 \frac{12}{4}=1.$

2. Condiție: $x^2-x-2\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty).$ Ecuația devine $x^2-x-6=0\Rightarrow S=\{-2,3\}.$

3. Se notează $x_1+x_2=S,\ x_1\cdot x_2=P$. Deoarece $x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-2x-3=0.$

4. Condiție: $m-1>0\Rightarrow m\in(1,+\infty).$ Din $\frac{m+2}{2(m-1)}=2\Rightarrow m=2.$

5. $AB=\sqrt{16+9}=5.$

6. Condiție: $x\in(0,\infty).$ Conform teoremei lui Pitagora $(x+8)^2=x^2+(x+7)^2\Rightarrow x^2-2x-15=0\Rightarrow x=5.$

REZOLVARE

1. Condiții: $x+1\geq 0$ şi $5-x\geq 0 \Rightarrow x\in[-1,5]$. $x^2-11x+24=0\Rightarrow x=3$.

2. $f(0)+f(1)+\ldots+f(5)=2(1+2+...+5)+6\cdot 3=48$.

3. Scăzând 2 din fiecare membru al inegalității și apoi împărțind cu 3, se obține $x\in\left[-2,\frac{2}{3}\right]$.

4. Distanța este egală cu $|x_1-x_2|$, unde x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x)=0\Rightarrow|x_1-x_2|=|-2-4|=6$.

5. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=2$.

6. Prin reciproca teoremei lui Pitagora, triunghiul ABC este dreptunghic A. Aria $\triangle ABC=\frac{AB\cdot AC}{2}=24$.

REZOLVARE

1. $2x = 8 \Rightarrow x = 4.$

2. Distanța este egală cu $|x_1 - x_2|$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = |7-1| = 6.$

3. $1+3+5+\ldots+21$ este suma a 11 termeni în progresie aritmetică de rație egală cu 2, deci $E = \sqrt{11^2} = 11.$

4. Cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$ se pot forma $A_4^3 = 24$ de numere de câte trei cifre distincte.

5. Din $CA = 2CB$ și $C \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$. Din $\overrightarrow{AC}(x_C - 2, y_C - 1)$ și

$\overrightarrow{CB}(-1 - x_C, 2 - y_C) \Rightarrow x_C = 0,\ y_C = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(0, \frac{5}{3}\right).$

6. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiul $ABC \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

REZOLVARE

1. Deoarece $6 \le 2x - 1 \le 8 \Rightarrow 7 \le 2x < 9 \Rightarrow x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4.$

2. $f(x) = y \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = -4 \Rightarrow x = 3$**,** deci dreapta intersectează graficul funcției f în punctul de coordonate $(3, -4)$.

3. Condiție: $x > 3$. Deoarece $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$.

4. Cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ se pot forma $4^2 = 16$ numere de două cifre.

5. $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{3\vec{i} + \vec{j}}{2} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ sunt $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. $\sin 120° = \sin\left(180° - 60^\circ\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

REZOLVARE

1. $1+3+5+\ldots+19$ este suma a 10 termeni în progresie aritmetică de rație egală cu 2, deci este egală cu 100.

2. $\Delta=-4a^2<0, \forall a\in\mathbb{R}^*$, deci ecuația nu admite soluții reale.

3. $\Delta=(m-2)^2 \Rightarrow -\dfrac{(m-2)^2}{4}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow m\in\{1,3\}$.

4. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=2^4$, $64=2^6$ și $\sqrt[3]{8}=2$ deci $\sqrt[3]{8}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}<64$.

5. Fie D mijlocul segmentului $BC \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=2\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

6. Aria $\triangle ABC=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, $\sin 120^\circ=\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ Aria $\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{9}{4}$.

REZOLVARE

1. $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6 = \lg \frac{60}{6} = 1.$

2. $p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

3. Condiție: $7 - x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 7]$. Din $7 - x = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6\}$.

4. $x_1 + x_2 = 2m + 1,\ x_1 x_2 = 3m \Rightarrow 5m + 1 = 11$, deci $m = 2$.

5. $AC = a \sin B, AB = a \sin C \Rightarrow 2S = AB \cdot AC = a^2 \sin B \sin C$.

6. $\sin 170^\circ = \sin\left(180^\circ - 10^\circ\right) = \sin 10^\circ \Rightarrow \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$.

Rezolvare

1. $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_6 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 5 \\ a_1 + 5r = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases}$; $a_9 = a_1 + 8r = 17$.

2. $f(1) + f(2) + ... + f(20) = 3 + 4 + ... + 22 = \dfrac{(3+22)\cdot 20}{2} = 250.$

3. $2^{2x+4} = 2^{x^2+5} \Rightarrow 2x + 4 = x^2 + 5 \Rightarrow x = 1.$

4. $n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0.$

5. $\dfrac{2}{-1} = \dfrac{3}{m} \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

6. $\cos x + \cos\left(180^\circ - x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $\cos 30° + \cos 60° + \cos 120° + \cos 150° = 0$

Rezolvare

1. $|2x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \Rightarrow x \in [0,1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow A = \{0,1\}$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases}$; $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 19.$

3. $x^2 - 25 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$; $x^2 - 25 = 144 \Rightarrow x = \pm 13 \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$.

4. Prin calcul se obține 0.

5. Fie M mijlocul lui $AB \Rightarrow M(3,4)$; $CM: 3x - 4y + 7 = 0$.

6. Aria $\Delta MNP = \dfrac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2} = 6$.

Rezolvare

1. f este descrescătoare pe $[-2,1] \Rightarrow$ cea mai mică valoare este $f(1) = -2$.

2. $f(1) + f(2) + ... + f(6) = 1 + 3 + ... + 11 = 36$.

3. $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x^2+3x+3>0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$; $2x+5 = x^2+3x+3 \Rightarrow x_1 = 1 \in \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$, $x_2 = -2 \in \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$.

4. $C_4^2 = 6, C_5^2 = 10, C_4^3 = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

5. Fie M mijlocul segmentului $BC \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$; $AM = \sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $\sin 60° - \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

Rezolvare

1. $C_5^2 - A_4^2 + 6 = 10 - 12 + 6 = 4$.

2. $f(-6) + f(0) + f(6) + f(12) = 0$.

3. $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; $x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 2 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

4. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + 2x - 7 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2,1);(-2,-7)\}$.

5. $\begin{cases} 3 - m + n = 0 \\ 1 + m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases}$.

6. $\sin 120° = \sin 60°$, $\cos 150° = -\cos 30° \Rightarrow$ produsul este 0.

Rezolvare

1. $1+2+2^2+...+2^7=1\cdot\dfrac{2^8-1}{2-1}=255$.

2. $x^2-3x+2>x-3\Rightarrow(x-2)^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. $\begin{cases}2x+3\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0,\infty)$; $2x+3=x^2\Rightarrow x_1=3\in[0,\infty)$, $x_2=-1\notin[0,\infty)\Rightarrow x=3$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n\in\{1,2,4,5\}\Rightarrow p=\dfrac{4}{5}$.

5. $\dfrac{-2}{m}=\dfrac{-m}{1}\neq-\dfrac{3}{5}\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

6. $\sin 30°-\cos 45°+\sin 60°=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare

1. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_5 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 3 \end{cases}$; $a_{2009} = a_1 + 2008r = 6025$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$; $m^2 - 4 = 5 \Rightarrow m = \pm 3$.

3. $2^{x^2-x} = 2^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$.

4. $f(1) \ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 - 1 + m + 1 \ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 \ge 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

5. Fie $\{M\} = AD \cap BC \Rightarrow M$ este mijlocul segmentelor AD şi $BC \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ şi $D(6,5)$.

6. $\cos x + \cos(180^\circ - x) = 0 \Rightarrow \cos 100^\circ + \cos 80^\circ = 0.$

Rezolvare

1. $a_{10} - a_2 = 16 \Rightarrow 8r = 16 \Rightarrow r = 2.$

2. $f(2) + f\left(2^2\right) + ... + f\left(2^7\right) = 2 + 3 + 2^2 + 3 + ... + 2^7 + 3 = 275$.

3. $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,\infty)$; $x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \notin [1,\infty) \\ x_2 = 3 \in [1,\infty) \end{cases}$. Deci soluția este $x = 3$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n = 1$ şi $n = 4 \Rightarrow p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

5. $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2,2)$; $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

6. $\sin^2 B + \sin^2 C = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1$

Rezolvare

1. $r = a_2 - a_1 = 2$; $a_{10} = a_1 + 9r = 20$; $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 110$.

2. $x_V = \dfrac{7}{2} \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow m = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 7x + 3$.

3. $3^{2x-1} = 3^{5-x} \Rightarrow 2x - 1 = 5 - x \Rightarrow x = 2$.

4. $A_5^2 - P_3 = 20 - 6 = 14$.

5. $4 - 3 + m = 0 \Rightarrow m = -1$.

6. $\text{Aria}\Delta MNP = \dfrac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2} = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Rezolvare

1. $(2x-1)^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le 2x-1 \le 3 \Rightarrow x \in [-1,2]$.

2. $f(0)+f(1)+...+f(10) = 1+2+...+11 = 66.$

3. Condiții: $\begin{cases} x^2+4>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow x>-4$; $x^2+4 = x+4 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

4. $P_3 = 6,\ A_3^1 = 3,\ C_4^3 = 4 \Rightarrow p = \dfrac{2}{3}$.

5. $AB: x+y+1=0$.

6. Aria$\Delta ABC = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare

1. $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6=\log_5 \frac{10\cdot 3}{6}=1$.

2. $f(1)+f(2)+...+f(6)=3+5+...+13=48$.

3. $5^{x^2-x}=5^{5x-5}\Rightarrow x^2-x=5x-5\Rightarrow x_1=1,\ x_2=5$.

4. Se notează cu x prețul inițial. Se obține ecuația $x\cdot\frac{110}{100}\cdot\frac{120}{100}=660\Rightarrow x=500$ lei.

5. $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(2+1)^2}=5$.

6. $NP^2=MN^2+MP^2-2\cdot MN\cdot MP\cdot\cos M\Rightarrow NP=\sqrt{19}$.

Rezolvare

1. $(a-3)^2+(b+2)^2=0 \Rightarrow a=3,\ b=-2$.

2. $f(5)=0 \Rightarrow$ produsul este 0.

3. Condiții: $\begin{cases} 3x-1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3},\infty\right)$; $3x-1=2x+1 \Rightarrow x=2$.

4. $\begin{cases} \Delta<0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<0 \\ 1>0 \end{cases}$ adevărat $\forall m \in \mathbb{R}$.

5. $AB: 2x-y-1=0$. Cum $C \in AB \Rightarrow m=5$.

6. $\frac{AC}{\sin B}=2R \Rightarrow \sin B=1$.

Rezolvare

1. $2^{x^2} = 2^4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

2. $f(2) = 0 \Rightarrow$ produsul este 0.

3. Condiții: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, \infty)$; $x^2 - x - 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = 2 \in [2, \infty)$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n = 5$ şi $n = 6 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

5. Fie C simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul lui $(AC) \Rightarrow C(0,0)$.

6. $\sin 10° = \cos(90° - 10°) = \cos 80°$; $\sin^2 80° + \sin^2 10° = \sin^2 80° + \cos^2 80° = 1$.

Rezolvare

1. $q=\dfrac{b_2}{b_1}=3$; $b_5=b_1\cdot q^4=162$.

2. $-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow m^2-8=1\Rightarrow m=\pm 3$.

3. $2x-5=x^2-8\Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1.$

4. $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=21$; -6 nu convine $\Rightarrow n=7$.

5. $d: y=x+n$; $A(1,1)\in d\Rightarrow n=0\Rightarrow d: y=x$.

6. $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare

1. $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8} = 2 + 2 - 2 = 2$.

2. $f(0) + f(1) + \ldots + f(6) = 3 + 1 - \ldots - 9 = -21$.

3. Condiții: $169 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-13, 13]$; $169 - x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 5 \in [-13, 13]$.

4. $A_4^3 = 24$.

5. Fie D mijlocul lui (BC) $\Rightarrow D(2,0)$; $AD = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2} = 4$.

6. Catetele sunt 4 și $4\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ Aria $= 8\sqrt{3}$.

Rezolvare

1. $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

2. $\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x + 2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1;1);(2;0)\}$.

3. Condiții: $9 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-3,3)$; $9 - x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm 2 \in (-3,3)$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n = 1$ şi $n = 2$, deci $p = \frac{1}{2}$.

5. $\sin(180^\circ - x) = \sin x \Rightarrow \sin 135^\circ = \sin 45^\circ$; $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

6. $A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 8\sqrt{2}$.

Rezolvare

1. $x^2 - 9 \le 0 \Rightarrow S = [-3,3]$.

2. $f\left(\frac{2010}{2009}\right) = 2 \Rightarrow$ punctul aparține graficului.

3. $3^x = t > 0$; $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0,\ t = 3 \Rightarrow x = 1$.

4. $2x + 1 = \frac{1+9}{2} \Rightarrow x = 2$.

5. $MN : x + y - 3 = 0$.

6. $\mathrm{tg}^2 30° + \mathrm{ctg}^2 45° = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Rezolvare

1. $r = a_2 - a_1 = -1$; $a_7 = a_1 + 6r = 0$.

2. $x^2 + 3 \le 12 \Rightarrow x \in [-3, 3]$.

3. $2^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1,\ t = 4 \Rightarrow x = 2$.

4. $A_5^4 = 120$.

5. $AB = 2\sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{10} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A.

6. $\cos x + \cos\left(180^\circ - x\right) = 0$; $(\cos 10° + \cos 170°) + (\cos 20° + \cos 160°) = 0$.

Rezolvare

1. $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

2. $f(2)+f\left(2^2\right)+...+f\left(2^5\right)=2+5+2^2+5+...+2^5+5=87$.

3. $2^{2x^2+3x-2}=2^3 \Rightarrow 2x^2+3x-2=3 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{5}{2}$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n=2$ și $n=3$, deci $p=\frac{1}{2}$.

5. AB: $(a+1)x+4y-2a+2=0$; cum $O(0,0)\in AB \Rightarrow a=1$.

6. $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos x=\pm\frac{4}{5}$ și $\cos x>0 \Rightarrow \cos x=\frac{4}{5}$.

Rezolvare

1. $a_8 = a_2 + 6r = 23$.

2. $f(3) + f\left(3^2\right) + ... + f\left(3^5\right) = 3 + 2 + 3^2 + 2 + ... + 3^5 + 2 = 373$.

3. $2x + 1 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; $2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

4. $C_6^2 = 15$.

5. Fie C mijlocul lui (AB). Se obține $C(1,1)$.

6. $\sin\left(180^\circ - x\right) = \sin x \Rightarrow \sin 150^\circ = \sin 30^\circ$; $\sin^2 150^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$.

Rezolvare

1. $x_V = -\frac{b}{2a} = -2$; $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -9$.

2. $f(1) + f(2) + ... + f(10) = -1 + 2 + ... + 26 = 125.$

3. $10 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 10)$; $10 - x = 9 \Rightarrow x = 1 \in (-\infty, 10)$.

4. $n \cdot (n-1) = 12 \Rightarrow n = 4,\ n = -3 \Rightarrow n = 4$.

5. $AB = 4,\quad AC = \sqrt{13},\quad BC = \sqrt{13}$; $P = 4 + 2\sqrt{13}.$

6. $\sin 30° = \frac{1}{2}, \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $p = \frac{1}{3}$.

Rezolvare

1. $q = \dfrac{b_2}{b_1} = 3$; $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 27$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$; $\dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{3}{m+2} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow m = -6$.

3. Condiții: $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, \infty)$; $x^2 - 4 = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [2, \infty)$.

4. Inegalitatea este verificată pentru $n \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow p = \dfrac{3}{4}$.

5. Fie C simetricul lui A față de B $\Rightarrow$ B este mijlocul lui (AC). Se obține $C(1, 3)$.

6. Aria $\Delta MNP = \dfrac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2} = \dfrac{10 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Rezolvare

1. $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_7 = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ r = 5 \end{cases} \Rightarrow a_{10} = 52 \Rightarrow S_{10} = 295.$

2. $f(7) = 0 \Rightarrow$ produsul este 0.

3. $x \geq 1;\ \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5 \in [1, \infty)$.

4. $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4 = 21 - 6 - 15 = 0.$

5. $\sqrt{(2+1)^2 + (a+1)^2} = 5 \Rightarrow a_1 = 3,\ a_2 = -5 \Rightarrow a = 3$.

6. $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = 6;\ A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Rezolvare

1. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$; $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$.

2. $f(m) = -1 \Rightarrow m_1 = 2,\ m_2 = 1$.

3. $2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$; $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

4. $C_5^3 = 10.$

5. Fie M mijlocul lui $AB \Rightarrow M(0,0)$; $CM = \sqrt{5}.$

6. Aria $\Delta ABC = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$

Rezolvare

1. $1+11+...+111=\dfrac{(1+111)\cdot 12}{2}=672$.

2. $f(m)=4 \Rightarrow m^2-2m+4=4 \Rightarrow m_1=0,\ m_2=2$.

3. $2^{x^2+x+1}=2^3 \Rightarrow x^2+x+1=3 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$.

4. Inegalitatea este verificată doar de 4 $\Rightarrow p=\dfrac{1}{4}$.

5. $m^2+m+m=0 \Rightarrow m_1=0,\ m_2=-2$.

6. Aria $\Delta MNP=\dfrac{MN\cdot NP\cdot \sin N}{2}=\dfrac{6\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$.

Rezolvare

1. $3x+2\geq 4x-1\Rightarrow x\leq 3,\ x\in\mathbb{N}\Rightarrow A=\{0,1,2,3\}$.

2. $G_f\cap Oy: A(0,-3)$; $G_f\cap Ox: B\left(\frac{3}{2},0\right)$.

3. $x^2-4\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; $S=\{\pm 2\sqrt{2}\}$.

4. $\frac{8}{100}\cdot 500=40$ lei.

5. $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+5\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{i}+8\vec{j}\Rightarrow\vec{v}(1,8)$.

6. $l=2\Rightarrow P=6$, deci $A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow A=\sqrt{3}$.

Soluție

1. Se rezolvă ecuația $2(2x-3)=x+1+x-3$ şi se obține $x=2$.

2. Dacă x este prețul inițial al produsului, atunci $x-\frac{10}{100}x=99$, de unde $x=110$ lei.

3. Numărul este 0 deoarece combinările sunt complementare.

4. Dacă $f(x)=ax^2+bx+c$ cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, atunci $f(1)=3$, $f(0)=5$ şi $f(-1)=11$, de unde $a=2$, $b=-4$ şi $c=5$.

5. MN, MP, PN linii mijlocii; deci $AMNP$ paralelogram. Obținem $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}$.

6. Din teorema cosinusului se obține $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluție

1. Numărul este 1 deoarece $\log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - 1$.

2. Se rezolvă sistemul $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ și se obține punctul comun $A(1;2)$.

3. Se înlocuiește *x* cu 5 și se obține $S = \left\{1; -\frac{7}{4}\right\}$.

4. Din condiții rezultă $x \in [-2;\infty)$. Se obține ecuația $3x^2 + 2x - 1 = 0$ cu soluțiile -1 și $\frac{1}{3}$.

5. $AB = \sqrt{10};\ AC = 1;\ BC = \sqrt{13}$. Deci $P = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{13}$.

6. Se aplică teorema sinusurilor și se obține $AC = 2$.

Soluție

1. $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+...+\lg\frac{9}{10}=\lg\frac{1}{10}=-1$.

2. Numărul este 0 deoarece combinările sunt complementare.

3. Se notează 3^x cu t şi se rezolvă ecuația $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$. Se obține $t\in\left\{3;\frac{1}{3}\right\}$ şi $x\in\{1;-1\}$.

4. Trebuie să avem $\Delta<0$. Se obține $m\in(3;7)$.

5. Se aplică teorema cosinusului și se obține $\cos A=-\frac{1}{15}$.

6. Deoarece $m_{AB}=a-2$, $m_{AC}=\frac{5-a}{4}$ şi $m_{AB}\cdot m_{AC}=-1$ se obține $a\in\{1;6\}$.

<u>Ministerul Educației, Cercetării și Inovării</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>
Soluție

1. Se aplică proprietățile logaritmilor şi se obține rezultatul 1.
2. Deoarece funcția este descrescătoare avem $\max f = f(-1) = 5$.
3. Din $x_1 x_2 = 3$ şi $x_1 = 3x_2$ se obține $x_2 = \pm 1$. Dacă $x_2 = 1$, atunci $m = -3$; dacă $x_2 = -1$, atunci $m = 5$.
4. Se foloseşte formula combinărilor complementare: $C_{n+1}^{n} = C_{n+1}^{1}$ şi rezultatul este 0.
5. $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ = \cos 80^\circ - \cos 80^\circ = 0$.
6. Mijlocul segmentului AB are coordonatele (3,3).

Soluție

1. $2^2 = 4$ și $\log_2 32 = 5$, deci $2^2 < \log_2 32$.

2. Din $f(2) = 3$ se obține $m = 1$.

3. $x = \pm\sqrt{3}$.

4. Se obține ecuația $n^2 - 3n - 4 = 0$. Convine doar $n = 4$.

5. $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

6. $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Soluție

1. Deoarece $\log_2 8 = 3$, se obține numărul $2 \in \mathbb{N}$.

2. Se rezolvă sistemul $\begin{cases} 4x - 6y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$ și se obține punctul comun $A(2;1)$.

3. Deoarece $x_1 + x_2 = m^2 + 3$ și $x_1 x_2 = 3$, se obține ecuația $m^2 + 6 = 7$ care are soluțiile ± 1.

4. După simplificări se obține ecuația $n^2 + 3n - 54 = 0$; convine doar soluția 6.

5. $\cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$.

6. $A\text{ria} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = 4\sqrt{3}$.

Soluție

1. Rația este 3 şi $S_6 = \frac{(2+17)\cdot 6}{2} = 57$.

2. Se pune condiția $\Delta = 0$ şi se obține $m^2 - 36 = 0$, de unde $m = \pm 6$.

3. Condiția $x^2 + 3x - 10 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (2; \infty)$. Ecuația devine $x^2 + 3x - 10 = 8$. Se obține $x \in \{3, -6\}$.

4. Elementele divizibile cu 5 sunt 15 şi 35, deci $p = \frac{1}{4}$.

5. Ecuația este $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - 1 = 0$, adică $x + 2y - 4 = 0$

6. Se aplică teorema cosinusului şi se obține $\cos B = \frac{3}{5}$.

Soluție

1. Numărul este 0 deoarece $\log_5 25 = 2$ și $\log_3 9 = 2$.

2. Se rezolvă sistemul $2a + b = 7$ și $-a + b = -2$ și se obține $a = 3$, $b = 1$.

3. $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 1 + 2 = x_1 + x_2 + 2$.

4. Din $10 - 3n \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}$ se obține $n \in \{0;1;2;3\}$.

5. Mijlocul segmentului BC este $M\left(3;0\right)$ și $AM = 5$.

6. Deoarece $\cos 30^\circ = \dfrac{AB}{BC}$ rezultă $BC = 8$.

Soluție

1. $(x+7)^2=(5-x)(3x+11)$ şi se obține $x\in\left\{-3;\frac{1}{2}\right\}$.

2. Dacă se notează cu *x* prețul în lei al produsului la producător, se obține $x+\frac{19}{100}x=238$, de unde $x=200$ şi valoarea TVA este 38 lei.

3. $\log_2 4=2$, $\log_3 9=2$, deci $2+2<6$.

4. Se rezolvă inecuația $3x-4+3-4\le 1$ şi se obține $x\in(-\infty;2]$.

5. Se rezolvă ecuația $x^2-23x+120=0$ şi se obține $x\in\{15;8\}$.

6. $y+2=2(x-1)\Leftrightarrow 2x-y-4=0$.

Soluție

1. Se obține $x^2 + x = 2$, de unde $x \in \{1; -2\}$.

2. Se pune condiția $2x - 3 > 0$ și se obține $D = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$.

3. $f_{\min} = 3m - m^2$. $f_{\min} = 2 \Leftrightarrow m \in \{1; 2\}$.

4. $2009 \cdot 1004 - 2007 \cdot 1004 - 2008 = 0$.

5. Se aplică teorema cosinusului și se obține $AC = 5\sqrt{7}$.

6. *M* este mijlocul segmentului *AB*, deci $M(3; -2)$.

Soluție

1. Numărul este $\log_6 \frac{30}{5} = 1$.

2. Se pune condiția $\Delta = 0$ şi se obține $(m-1)^2 = 0$, adică $m = 1$.

3. Se obține $(x+1)(x-5) \leq 0$ adică $x \in [-1;5]$.

4. $\frac{8!}{3!5!} = 56$, $\frac{9!}{2!7!} = 36$ deci numărul este 20.

5. $\sin x \cdot \sin x + (-\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

6. $\text{Aria} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 25$.

Soluție

1. $x+2>0 \Rightarrow x \in (-2;+\infty)$. $x+2=9 \Leftrightarrow x=7 \in (-2;+\infty)$.

2. $\max f = 4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$

3. Condiția: $x \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$; $2x+1=49 \Rightarrow x=24 \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$.

4. $n(n-1) \le n+8, n \in \mathbb{N}, n \ge 2 \Leftrightarrow n \in \{2;3;4\}$.

5. $AB = 13 \Leftrightarrow 25 + (a-1)^2 = 169 \Leftrightarrow a \in \{-11;13\}$.

6. Se aplică teorema sinusurilor și se obține $R = 20$.

Soluție

1. $a_1+a_1+4=10 \Leftrightarrow a_1=3$.

2. $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m+2$; $2m+4=m \Leftrightarrow m=-4$.

3. Condiția: $x\in(-1;\infty)$; $\frac{x+2}{x+1}=2 \Leftrightarrow x=0$.

4. $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

5. Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{3}{2};2\right)$, iar simetricul este $D(0;4)$.

6. $Aria=\frac{10\cdot 16\cdot \sin 60^\circ}{2}=40\sqrt{3}$.

Soluție

1. Rația este 2 şi $b_1 = \frac{3}{2}$.

2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2009$.

3. Condiția: $x^2 - x - 2 > 0$. Se obține $x^2 - x - 2 = 4$, de unde $x \in \{-2;3\}$.

4. Se obține inecuația $(19-n)(18-n) \le n(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $n \le 17$, de unde $n \in \{10;11;...;17\}$.

5. Se rezolvă sistemul format din cele două ecuații şi se obține $A(-2;1)$.

6. Se foloseşte teorema cosinusului şi se obține $AB = 3\sqrt{2}$.

Soluție

1. Numărul este $3 \in \mathbb{N}$.

2. Se obține ecuația $x^2 - 4x = -3 \Rightarrow x \in \{1,3\}$.

3. Se obține ecuația $4m - m - 6 = 0$, de unde $m = 2$.

4. $p = \dfrac{2}{90} = \dfrac{1}{45}$.

5. Punctele de intersecție cu axele sunt $A(0;-5)$ şi $B\left(\dfrac{5}{3};0\right)$, iar aria este $\dfrac{25}{6}$.

6. $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$.

Soluție

1. Se arată că $2C_3^1 = \log_2 2 + 5$.

2. Punctele sunt $A(0;2)$ şi $B(-1;0)$.

3. $-2 = 6m - 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{6}$

4. Numărul este 10.

5. $AB = BC \cdot \cos 60^\circ = 4$, $AC = BC \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

6. Aria este 4.

Soluție

1. $5+1=6=3!$

2. Punctele sunt $A(1;0)$, $B(-1;0)$ şi $C(0;-1)$.

3. $\Delta=5m^2+4>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

4. Se rezolvă sistemul $b_1+b_2=8$ şi $b_2-b_1=4$. Se obține $b_1=2$, apoi rația $q=3$ şi suma 26.

5. Se foloseşte teorema sinusurilor şi se obține $AC=10\sqrt{2}$.

6. Se obține $M\left(\frac{5}{2};2\right)$ şi $AM=6,5$.

Soluție

1. Se rezolvă sistemul de inecuații $3x+2>-4$ şi $3x+2<4$ şi se obține $x\in\left(-2;\frac{2}{3}\right)$.

2. Se obține ecuația $3x+4=4x$, $x\in[0;\infty)$, de unde $x=4$.

3. Se aduce ecuația la forma $3^x\cdot 7=7$, de unde $x=0$.

4. $a=\frac{1}{4}b$ şi $\frac{a}{a+b}=\frac{a}{5a}=\frac{1}{5}$. Procentul este 20%.

5. Se notează cu b şi c lungimile catetelor şi cum $b=c$, rezultă $\frac{b^2}{2}=18$. Se obține $b=c=6$.

6. Se foloseşte identitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi se obține constanta 1.

Soluție

1. Rezultatul este 0

2. Se rezolvă inecuația $x^2 - 2x - 15 \le 0$ şi se obține $x \in [-3;5]$.

3. Se pune condiția $\Delta = 0$, de unde $m = -1$.

4. $A = 2 \in \mathbb{N}$.

5. Deoarece $\sin 10^\circ = \cos\left(90^\circ - 10^\circ\right)$, rezultă $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ = 0$.

6. Segmentele *MP* şi *NQ* au acelaşi mijloc şi $MP = NQ = 2\sqrt{10}$, deci *MNPQ* este dreptunghi.

Soluție

1. $x \in [2;3]$.

2. $\min f = \frac{4m - m^2}{4} = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

3. Condiția: $x \neq 0$. Se rezolvă ecuația $x^2 = 4$ şi se obține $x = \pm 2$.

4. Rezultatul este 10.

5. Se obține $M(1;-2)$ şi apoi $AM = 3$.

6. $\cos\left(180^\circ - x\right) = -\cos x = -\frac{1}{2}$.

Soluție

1. $5+10+1=16=2^4$.

2. Se obține $6^x=6^2$, de unde $x=2$.

3. Se folosesc relațiile $x_1+x_2=2m$ şi $x_1x_2=m^2-1$ şi $x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+2=\left(m-1\right)^2\geq 0$.

4. Se obține $x^2+2x-3=5$ şi $x^2+2x-3>0$, de unde $x\in\left\{-4;2\right\}$.

5. $a=-\frac{2}{3}$ deoarece $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, deci $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$.

6. Avem $m\left(\sphericalangle ABC\right)=30^\circ$ şi aria este egală cu 40.

Soluție

1. Rezultatul este 6.
2. $x_V = 1$, $y_V = 1$.
3. Se ridică la puterea a treia şi se obține $x = -1$.
4. $p = \frac{7}{91} = \frac{1}{13}$.
5. Se obține $AC = 20$, $AO = OD = 10$ şi se aplică teorema cosinusului în triunghiul *AOD*: $\cos(\sphericalangle AOD) = \frac{7}{25}$.
6. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Soluție

1. Se obține rația 2 şi $a_5 = 7 + 2 \cdot 4 = 15$.

2. Se obține ecuația $n(n-1) = 12$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ cu soluția $n = 4$.

3. Avem $\Delta = 1 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

4. Condiția: $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Se obține ecuația $(x+4)(2x+3) = 1 - 2x$, de unde $x = -1$.

5. Se obține $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

6. $AC = BC \sin B = 9$ şi $AB = 12$.

Soluție

1. Rezultatul este 0.
2. $b_1(q-1)=3 \Rightarrow q=2$.
3. Condiția: $x \in (-1;\infty)$**.** Se obține ecuația $\sqrt{x+1}=2$, de unde $x=3$.
4. $x^2-11x+30=0$.
5. $x+y-7=0$.
6. $BC=5$, $AB=5\sqrt{3}$, $Aria=25\sqrt{3}$.

Soluție

1. Rația progresiei este 2 și $x=3$.

2. $f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x-5=0$. Deci $A(5;9)$ și $B(-1;3)$.

3. $x^3+x^2-x-2=x^3\Rightarrow x\in\{-1;2\}$.

4. $1500+\frac{8}{100}\cdot 1500=1620$ lei.

5. $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

6. $\mathcal{A}$ria $=12\sqrt{3}$.

Soluție

1. Avem $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$ și $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$; cum $2 = \sqrt{1 \cdot 4}$, rezultă că termenii sunt în progresie geometrică de rație 2.

2. Cum $f(2) = 2 - 2 = 0$, rezultă produsul 0.

3. Condiții: $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, prin ridicare la pătrat obținem $x^2 + 2x - 15 = 0$, ecuație de gradul 2 cu soluțiile $x = 3$ și $x = -5$, care verifică condițiile de existență, deci $S = \{-5; 3\}$.

4. $2^x = t > 0;\ t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, adică $S = \{-1, 1\}$.

5. Coordonatele punctului sunt $x = \frac{3+5}{2} = 4,\ y = \frac{0+(-2)}{2} = -1$.

6. $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ = \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$.

Soluție

1. $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=\log_2 \frac{5\cdot 12}{30}=\log_2 2=1$.

2. $\Delta=-3m^2-4<0$, deci funcția păstrează semnul + pe tot domeniul de definiție adică reprezentarea grafică a funcției *f* este situată deasupra axei *Ox*.

3. $2\cdot(4^a+1)=2^a+2^{a+2}$. Notăm $2^a=t>0$ şi avem $2t^2+2=t+4t \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$, cu soluțiile $t=2$ sau $t=\frac{1}{2}$, deci $a=1$ sau $a=-1$.

4. $C_{n+1}^1=n^2-1 \Rightarrow n+1=n^2-1 \Rightarrow n=2$.

5. $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{QN}=\overrightarrow{QN}$, adevărat.

6. $\cos\left(90^\circ-x\right)=\sin x$ şi $\cos\left(180^\circ-x\right)=-\cos x$; obținem $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, adevărat pentru oricare *x*..

Soluție

1. $\dfrac{2+C_4^1}{A_3^1}=2$.

2. $x+1=\dfrac{(x-1)+(2x-1)}{2}$, deci $2x+2=3x-2, x=4$.

3. $f(0)+f(1)+\ldots+f(4)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{2^4+2^3+2^2+2+1}{2^4}=\dfrac{2^5-1}{16}=\dfrac{31}{16}$.

4. Utilizăm relațiile lui Viète: $S=x_1+x_2=m-1$; $P=x_1x_2=-m$, deci $m-1=2(-m+4)\Rightarrow m=3$.

5. $\dfrac{y-1}{-2-1}=\dfrac{x-2}{1-2}\Rightarrow y-1=3x-6,$ obținem $AB: y=3x-5$.

6. $\sin B=\dfrac{AC}{BC}, \sin C=\dfrac{AB}{BC}, AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$; obținem $AD^2=AB\cdot AC\cdot\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{AB}{BC}=\left(\dfrac{AB\cdot AC}{BC}\right)^2$, adevărat.

Soluţie

1. $\log_5 18 - \log_5 2 = \log_5 \frac{18}{2} = \log_5 9 = 2\log_5 3$, deci $\frac{\log_5 18 - \log_5 2}{\log_5 3} = \frac{2 \cdot \log_5 3}{\log_5 3} = 2$.

2. $a\left(f\left(x\right)+h\left(x\right)\right)=a\left(4x+4\right)=2a\left(2x+2\right)=2ag\left(x\right)$, $2ag\left(x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

3. Cum $4^x = (2^2)^x = 2^x$, din egalitatea dată obţinem $2^{3x} = 8 = 2^3$ şi din injectivitatea funcţiei exponenţiale rezultă $x = 1$.

4. $P_4 = 4! = 24$.

5. $x_C = 5 = \frac{m^2 - 1 + 2}{2} \Rightarrow m = 3$ sau $m = -3$.

6. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, deci $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Rezultă că $ABCD$ paralelogram.

Soluție

1. $\frac{2!+3!}{C_8^1}=\frac{2+6}{8}=1$.

2. Echivalent cu a arăta că $f^2(0)=f(1)\cdot f(-3)$, adică $3^2=1\cdot 9$, adevărat.

3. Din prima ecuație avem $y=3-x$, şi a doua ecuație devine $x^2+2x-3=0$. $x_1=1, x_2=-3$, care implică $y_1=2,\ y_2=6$; deci $S=\{(1,2);(-3,6)\}$.

4. Condiții: $3x+1>0,\ x-1>0 \Rightarrow$ deci $x>1$; $\log_5(3x+1)=\log_5(5(x-1))$ şi vem $3x+1=5x-5 \Rightarrow x=3$ soluție care verifică condițiile de existență, deci $S=\{3\}$.

5. $ON = OM = \sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$, deci $MN = 2OM = 2\sqrt{13}$.

6. $\frac{BC}{\sin A}=2R$, adică $\sin A=\frac{BC}{2R}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

Soluție

1. $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2; \sqrt[3]{-8} = -2$, rezultatul este 0.

2. Se obține inecuația: $2x^2 + 2x - 12 \le 0$, echivalentă cu $x^2 + x - 6 \le 0$, deci $S = [-3, 2]$.

3. $x_V = -\frac{4}{-2} = 2$, deci $f(2)$ este maximul funcției, deci $f(x) \le f(2)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

4. $\left(x - \frac{10}{100} \cdot x\right) - \left(x - \frac{10}{100} \cdot x\right) \cdot \frac{25}{100} = 540 \Rightarrow x = 800$.

5. $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = 2^2 + m^2 = 5$, deci $m^2 = 5 - 4 = 1, m = \pm 1$.

6. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$, deci $BC^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^0 = 52 - 24 = 28, BC = 2\sqrt{7}$.

Soluție

1. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$, deci obținem 0.

2. Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2=-a$; $x_1x_2=-a-1$, deci $x_1+x_2-x_1x_2=1$.

3. Obținem $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ și $x=-1$.

4. $C\in(AB)$ și $CA=2CB$; deci $CB=\frac{1}{3}AB=4$.

5. Ecuația lui AB: $y=2x+1$. Ecuația lui CD: $y=2x-1$. AB este paralelă cu CD pentru că au pantele egale, $m_{AB}=m_{CD}=2$ și ordonatele la origine diferite ($-1\neq 1$).

6. Utilizăm proprietățile unghiurilor suplementare: $\sin(180^\circ-x)=\sin x$, $\cos(180^\circ-x)=-\cos x$, deci $\sin 100^\circ+\cos 100^\circ-a=\sin(180^\circ-80^\circ)+\cos(180^\circ-80^\circ)-a=\sin 80^\circ-\cos 80^\circ-a=a-a=0$.

Soluție

1. $2C_3^1 - A_3^2 = 2\cdot 3 - 3\cdot 2 = 0$.

2. $\log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 \frac{14\cdot 3}{6} = \log_2 \frac{7\cdot 6}{6} = \log_2 7$.

3. Condiții: $x+1 \geq 0, x^2 - x - 2 \geq 0$; obținem $x+1 = x^2 - x - 2$, adică $x^2 - 2x - 3 = 0$ care are soluțiile $x_1 = -1,\ x_2 = 3$.

4. Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 = -\frac{-(m+1)}{1} = m+1$; $x_1x_2 = \frac{m}{1} = m$, deci $x_1 + x_2 - x_1x_2 = (m+1) - m = 1$.

5. $A_{ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin(BAC)}{2} = \frac{4\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

6. Cum $\sin(180^\circ - x) = \sin x$, obținem $\sin 135^\circ + \mathrm{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ = 1$.

Soluție

1. Cum $\sqrt{2} > 1$ şi $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$, obținem $b < 1 < a$.

2. Cerința e echivalentă cu a arăta că $\Delta = 0$. Cum $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$, obținem că parabola este tangentă la *Ox*.

3. Ecuația este echivalentă cu $(3 \cdot 5)^x = 15; 15^x = 15^1 \Rightarrow x = 1$.

4. $x + \frac{19}{100} \cdot x = 357 \Rightarrow x = 300$ lei, deci TVA-ul este 57 lei.

5. $BD = 10 \Rightarrow BO = CO = 5$, cu $AC \cap BD = \{O\}$. Din teorema cosinusului obținem $\cos(\sphericalangle BOC) = \frac{7}{25}$.

6. Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$, respectiv $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ sunt opuşi deci suma lor este $\vec{0}$; deci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Soluție

1. $b_4 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 16 \cdot \frac{1}{8} = 2$.

2. Sistemul este echivalent cu rezolvarea ecuației $t^2 - St + P = 0$, unde $S = x + y = -6, P = xy = 8$, deci $t^2 + 6t + 8 = 0$. Sistemul are soluțiile $S = \{(-2,-4);(-4,-2)\}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2^{-x} = 2^2$ şi obținem $-x = 2, x = -2$.

4. Numărul cazurilor posibile este egal cu $3^2 = 9$. Numărul cazurilor favorabile este 3; $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

5. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

6. $\sin\left(180^\circ - x\right) = \sin x$, deci $\sin\left(180^\circ - x\right) = \frac{4}{5}$.

Soluție

1. Sistemul este echivalent cu rezolvarea ecuației $t^2 - St + P = 0$, unde $S = x + y = 5, P = xy = 6$, deci $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$; deci sistemul are soluțiile $S = \{(2,3);(3,2)\}$.

2. $f(-1) = 5^{-(-1)} = 5$; $f(0) = 5^0 = 1$; $5f(1) = 5 \cdot 5^{-1} = 5^0 = 1$, obținem $f(-1) + f(0) + 5f(1) = 5 + 1 + 1 = 7$.

3. Cum $(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ obținem $(3+2\sqrt{2})^x = (3+2\sqrt{2})^1$ și obținem $x = 1$.

4. $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

5. Fie $M(x;y)$ mijlocul segmentului *AB*, $x = \frac{2+4}{2} = 3$; $y = \frac{1+(-3)}{2} = -1$, $M(3;-1)$.

6. Avem proprietatea $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, deci $\cos(180^\circ - x) = -\frac{1}{3}$.

Soluție

1. $a_4 = 2 + 3 \cdot 3 = 11$.

2. Din condițiile $\Delta > 0, P < 0$, se obține: $1 - 4m > 0$ şi $m < 0$; $S = (-\infty, 0)$.

3. Condiții de existență: $x^2 - x - 2 > 0;\ 2x - 4 > 0 \Rightarrow x \in (2;\infty)$; din proprietățile logaritmilor obținem:
$\log_2\left(x^2 - x - 2\right) = \log_2(2x - 4) + 1 = \log_2(2x - 4) + \log_2 2 = \log_2 2(2x - 4)$ și avem $x^2 - x - 2 = 4x - 8$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$, cu soluțiile 2 şi 3, dar doar 3 verifică condițiile impuse, deci $S = \{3\}$.

4. $n + n(n-1) = 4 \Rightarrow n^2 = 4$, dar $n \geq 2$, deci $n = 2$.

5. $A_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1$.

6. Cum $\sin(180^o - x) = \sin x$, obținem $2\sin^2 135^\circ = 2\sin^2 45^o = 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$.

Soluție

1. $a_1 = 10,\ a_4 = 19 = a_1 + 3r \Leftrightarrow 10 + 3r = 19 \Rightarrow r = 3$.

2. f descrescătoare $\Rightarrow f_{\min} = f(1) = 0$.

3. Condiție: $x > 0$. Notăm $\lg x = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 2$. $S = \{10;100\}$.

4. $x + \frac{15}{100} \cdot x = 460 \Rightarrow x = 400$

5. $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow B(3,4)$; $\overrightarrow{OB} = 7\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow A(7,2)$, deci $M(5,3)$.

6. Cum $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$; $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$, rezultatul este 0.

Soluție

1. Obținem $1+2+2^2+\ldots+2^6=2^7-1=127$.

2. $(x-1)(x+1)^2\geq 0$; cum $(x+1)^2\geq 0$, pentru $x\neq -1$ avem $x-1\geq 0$, deci $x\geq 1$. Pentru $x=-1$, inecuația se verifică, deci soluția este $S=\{-1\}\cup[1,+\infty)$.

3. Cum $\Delta=2009^2+4m^2>0$, există soluții reale și din relațiile lui Viète, $P=\frac{-m}{m}=-1$, constant.

4. $C_n^0+C_n^1=1+n=8$, deci $n=7$.

5. $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

6. Cum printre factorii produsului se află și $\lg\left(\operatorname{tg}45^\circ\right)=\lg 1=0$, produsul este 0.

Soluție

1. $\frac{25-1}{4}+1=7$, deci $S_7=\frac{(1+25)\cdot 7}{2}=91$.

2. $x\in(-2;1)\cap\mathbb{Z}=\{-1;0\}$.

3. $3\cdot 6^x=108\Rightarrow 6^x=6^2\Rightarrow x=2$.

4. Cerință echivalentă cu a determina numărul funcțiilor $f:\{a,b,c\}\to\{1,2\}$, adică $2^3=8$.

5. Relația $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ se rescrie $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, ceea ce implică faptul că $AB \parallel CD$, $AB = CD \Rightarrow ABCD$ paralelogram.

6. Din teorema sinusurilor avem $\frac{BC}{\sin A}=2R$, deci $\sin A=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

Soluție

1. Elementele mulțimii A sunt termeni în progresie aritmetică de rație 3, deci sunt $\frac{40-1}{3}+1=14$ elemente..

2. $f(-3)f(3)=f(-2)f(2)=f(-1)f(1)=f(0)=1$, deci produsul este 1.

3. Condiții de existență: x >0; obținem $\sqrt[3]{x}=2 \Rightarrow x=2^3=8$.

4. Cerință echivalentă cu numărul permutărilor de 3 elemente, adică 3!=6.

5. Din condiția de apartenență a lui B la dreaptă rezultă $a-1+4-5=0$, deci $a=2$. Din condiția de apartenență a lui A la dreaptă rezultă $2+b-5=0$, deci $b=3$.

6. Printre factorii produsului se află și $\cos 5^0 - \cos 5^0 = 0$; produsul este 0.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Avem: $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = -2$, $b_3 = 2\sqrt{2}$, deci $b_1 b_2 b_3 = -8$.

2. $f(x) + 2g(x) = 4x^2 - 4x + 1 + 2(2x - 1) = 4x^2 - 1 \Rightarrow 4x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$.

3. $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 3^{2x} - 3^x + 3 \cdot 3^x - 3 = 3^x(3^x - 1) + 3(3^x - 1) = (3^x - 1)(3^x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$.

4. $3! - C_4^2 = 3! - \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 - 6 = 0.$

5. $AO = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$.

6. $\sin B = \frac{AC}{BC}$, $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin B + \cos B = \frac{AB + AC}{BC}$.

Soluție

1. Cum $f(1)=0$, produsul este 0.

2. Minimul funcției este $-\dfrac{\Delta}{4a}=-2$, deci $m^2-8=8 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$.

3. $x>0$. Utilizăm proprietatea $a^{\log_a x}=x$, deci $x=4$.

4. $n+2+n+2=n^2+5 \Rightarrow n=1$.

5. Obținem $B(2,-3)$ și $C(-2,3)$, deci $BC=\sqrt{(2-(-2))^2+(-3-3)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

6. Din teorema sinusurilor, $\dfrac{BC}{\sin A}=2R$, deci $BC=2\cdot 4\cdot \dfrac{1}{2}=4$.

Soluție

1. $\log_2 18 = \log_2\left(3^2 \cdot 2\right) = 2\log_2 3 + \log_2 2 = 2a + 1$.

2. $f(1) + f(2) + f(3) = (a+b) + (2a+b) + (3a+b) = 6a + 3b$, deci $b = 0$. Cum $f\left(4\right) = 8$, obținem $4a = 8 \Rightarrow a = 2$, adică $f\left(x\right) = 2x$.

3. Intersecția cu Oy este $(0, f(0)) = (0, 6)$. Pentru intersecția cu Ox rezolvăm ecuația $f(x) = 0 \Rightarrow 2^{x+3} = 2 \Rightarrow x = -2$; punctul de intersecție este $(-2, 0)$.

4. $5400 - 4860 = 540$; $\frac{x}{100} \cdot 5400 = 540 \Rightarrow x = 10$, deci 10 %.

5. Condiția: $\frac{a}{8} = \frac{2}{a} \neq \frac{2}{4}$. Din $a^2 = 16$ rezultă $a = \pm 4$, dar pentru $a = 4$ cele 3 fracții devin egale, $a = -4$.

6. Dacă $M(x,y)$ este mijlocul lui BC, atunci $x = \frac{2+0}{2} = 1$, $y = \frac{0+2}{2} = 1$, deci $M(1,1)$.

$AM = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

Soluție

1. $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2=6\in\mathbb{N}$.

2. Cerința este echivalentă cu $x^2-4x+3\geq -1$, adică $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$ (A) pentru oricare x real.

3. Împărțim prima ecuație prin 2 şi notăm $S=x+y=8, P=xy=12$, deci x, y sunt soluții ale ecuației $t^2-St+P=0$, adică $t^2-8t+12=0\Rightarrow t_1=2,\ t_2=6$, deci sistemul are soluțiile (2,6) şi (6,2).

4. Împărțim ecuația prin $(n-2)!$; se obține $n(n-1)=12=3\cdot 4$, deci singura soluție este $n=4$.

5. $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+4\vec{j}$, deci $C(4,4)$.

6. Utilizăm teorema cosinusului pentru unghiul A: $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4+16-9}{16}=\dfrac{11}{16}$.

Soluție

1. $2x-2=\frac{(x-1)+(x+3)}{2}$; obținem $4x-4=2x+2 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$.

2. Cum $\Delta=m^2+4>0$, condiția ca soluțiile să fie opuse este ca suma lor să fie 0, deci $S=m \Rightarrow m=0$.

3. $2^{-x}=2^{x-2}, -x=x-2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.

4. $C_{10}^{9}-C_{9}^{8}=C_{10}^{1}-C_{9}^{1}=10-9=1$.

5. $AB: y=-x+6$ şi $C \in AB \Leftrightarrow 5=-m+6 \Leftrightarrow m=1$.

6. Cum triunghiul este dreptunghic avem proprietatea că $\sin C=\cos B \Rightarrow \sin C=\frac{3}{5}$.

Soluție

1. $x+1=\frac{(x-1)+(2x+5)}{2}$, de unde avem $2x+2=3x+4 \Rightarrow x=-2$.

2. $\Delta=9-4m>0$, deci $m<\frac{9}{4}$ şi $x_1x_2=1$, deci $m=1$.

3. Condiția: $x>0$; $(\lg x-1)(\lg x-3)=0$, deci $x=10$ sau $x=1000$.

4. $x-\frac{15}{100}x=680 \Rightarrow x=800$ lei.

5. $AB^2=(-m-2)^2+(m+2)^2=(4\sqrt{2})^2$, deci $2(m+2)^2=32 \Rightarrow (m+2)^2=16 \Rightarrow m=2$ sau $m=-6$.

6. $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+75-100}{50\sqrt{3}}=0$.

Soluție

1. $\log_3 24 = \log_3(3\cdot 2^3) = \log_3 3 + 3\log_3 2 = 1 + 3a$.

2. $-a + b = -b + a \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$, deci $f(x) = g(x) = ax + a, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = g$.

3. $4^{x-1} = 4^{-1}$ rezultă $x - 1 = -1$, adică $x = 0$.

4. $C_n^2 = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Rightarrow n(n-1) = 12 = 4\cdot 3$, deci soluția este $n = 4$.

5. Obținem ecuația $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0$.

6. Triunghiul *MON* este dreptunghic în *O*, are catetele de lungimi 3 şi 4, deci ipotenuza este 5 şi înălțimea din *O* este $\frac{3\cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

Soluție

1. Din $2x+1 \geq 3x-1$, obținem $x \leq 2, x \in \mathbb{N}$, deci $A=\{0,1,2\}$.

2. $f(1)+f(4)-f(2)=\log_2 1+\log_2 4-\log_2 2=0+2-1=1$.

3. $\Delta=9-4m>0,$ deci $m<\frac{9}{4}$ şi $x_1x_2=m<0$, deci $m\in(-\infty,0)$.

4. Numărul cazurilor posibile este 4; numărul cazurilor favorabile este 2 (pentru $n=2$ şi $n=4$), deci probabilitatea este $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

5. $AB: y=2x+1, C\in AB$, deci $m=7$.

6. Fie $B(x,y)$. Avem $3=\frac{2+x}{2}$, adică $x=4$ şi $5=\frac{4+y}{2}$, adică $y=6$, deci $B(4,6)$.

Soluție

1. $b_1 b_2 b_3 = 1 \cdot (-2) \cdot 4 = -8$.

2. $f(1) + f(3) = 2 + \log_3 1 + 2^3 + \log_3 3 = 2 + 0 + 8 + 1 = 11$.

3. $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2};\ y_V = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

4. $1 + 5 - 10 = -4$.

5. Dacă $M(x, y)$, atunci $x = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2};\ y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, rezultă că $OM = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

6. Aplicăm teorema sinusurilor, $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, deci $R = \frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$.

Soluție

1. **a)** Utilizând relațiile lui Viète se obține $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) Se înlocuiesc soluțiile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ în relație. Adunând relațiile obținute se ajunge la rezultatul $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

c) Se utilizează relațiile Viète şi se obține $d = 0$.

2. **a)** Egalitatea se demonstrează prin gruparea termenilor sau efectuarea calculelor.

b) $x \circ (-4) = -4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Din punctul **b)** rezultă $a \circ (-4) = -4$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, deci rezultatul compunerii este -4.

Soluție

1. **a)** Se obține rezultatul $d = 14$.

b) $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ și apoi se verifică prin calcul direct.

c) Ecuația se scrie în forma $(2^x)^3 + (3^x)^3 + (5^x)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 0$, se utilizează descompunerea în produs de la punctul **b)** și se obține unica soluție $x = 0$.

2. **a)** $x \circ y = 2x(y-3) - 6(y-3) + 3 = 2(x-3)(y-3) + 3$.

b) $x \circ 3 = -18 + 21 = 3 \circ x = 3$.

c) Șirul de compuneri $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$ conține elementul $\sqrt{9}$, pentru care avem $a \circ \sqrt{9} = 3, \forall a \in \mathbb{R}$. Se obține rezultatul 3.

Soluție

1. **a)** Din relațiile lui Viète se obține $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) Utilizând formula $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3\right)$ şi relațiile lui Viete se obține $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 4$.

c) Se obține $d = 0$.

2. **a)** Prin calcul direct se obține $h = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$.

b) Se obțin valorile $a = 2$ şi $b = -8$.

c) Ecuația se scrie în forma $(2^x)^4 + 2\cdot(2^x)^3 - 28\cdot(2^x)^2 - 8\cdot 2^x + 96 = 0$. Utilizând rezultatele de la punctele anterioare se obțin soluțiile $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1$.

Soluție

1. **a)** Efectuând înmulțirea $A^2 = A \cdot A = A$ se deduce egalitatea $A^3 = A$.

b) Se utilizează egalitatea

$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + (a + b + ab)A$.

c) Avem $X(1) + X(2) + X(3) + ... + X(2009) = I_2 + A + I_2 + 2A + ... + I_2 + 2009A$, de unde se obține $X(1) + X(2) + ... + X(2009) = 2009I_2 + 1005 \cdot 2009A$.

2. **a)** Se obțin soluțiile $x_1 = \hat{1}$ și $x_2 = \hat{4}$.

b) Se obține $d = \hat{0}$.

c) Soluțiile sistemului sunt perechile ordonate $(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{4}) (\hat{5}, \hat{0})$.

Soluție

1. **a)** Din egalitatea $\det(A) = (x-3)^2 - 1 = 0$ se obțin valorile $x_1 = 2$ şi $x_2 = 4$.
   b) Se verifică prin calcul direct.
   c) Se obține $x = 4$.
2. **a)** $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6 = x(y-2) - 2(y-2) + 2 = (x-2)(y-2) + 2$.
   b) Se utilizează rezultatul de la punctul **a)**.
   c) Utilzând proprietatea de asociativitate a operației şi egalitatea $x \circ 2 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$, se obține rezultatul $E = 2$.

Soluție

1. **a)** Condiția de coliniaritate $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ este verificată.

b) Din coliniaritatea punctelor $O; A_1; A_2$ rezultă că numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele $O; A_0; A_1; A_2$ este 4.

c) Se utilizează formula $S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$ şi se obține rezultatul $S = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$.

2. **a)** Se verifică prin efectuarea calculelor.

b) Egalitatea $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x, \forall x \in \mathbb{Z}$ este verificată pentru $e = 0$, deci elementul neutru din grupul $(G, \cdot)$ este matricea $A_0 = I_3$.

c) Se verifică egalitatea $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Soluție

1. **a)** Se obține $B^2 = A$.

b) Se verifică egalitatea $A \cdot A^{-1} = I_2$.

c) Se utilizează egalitatea $C = B^2 + A^{-1} = A + A^{-1} = 6 \cdot I_2$.

2. **a)** Se utilizează condiția $g \mid f \Leftrightarrow f(\hat{2}) = \hat{0}$, se obține $a = \hat{1}$

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Ecuația se scrie în forma $(X + \hat{1})(X^2 + \hat{1}) = \hat{0}$, care are soluțiile $x_1 = \hat{4}$, $x_2 = \hat{2}$ și $x_3 = \hat{3}$.

Soluție

1. **a)** $Y^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

b) Se obține $\det(A) = 0$

c) Avem $\det\left(B(a)\right) = 1 - 4a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$, deci $\det(B) \neq 0 \Rightarrow \exists\left(B(a)\right)^{-1}$.

2. **a)** $f\left(\hat{0}\right) = g\left(\hat{0}\right)$ şi $f\left(\hat{1}\right) = g\left(\hat{1}\right) \Rightarrow a = \hat{2}$ şi $b = \hat{2}$.

b) Se obține $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4}) = \hat{0}$

c) Se rezolvă ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$ şi se obțin soluțiile $x_1 = \hat{0}$ şi $x_2 = \hat{4}$.

Soluție

1. **a)** $A+2I_2=O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=-2,\ b=0,\ c=0,\ d=-2$.

b) $B=A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B=(c-b)^2$.

c) $A+A^t=2I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a=d=1,\ b=-c$. $\det\left(A-A^t\right)=4b^2 \vdots 4$.

2. **a)** $e=5$.

b) $x\circ x\circ x=(x-4)^3+4;\ (x-4)^3+4=x \Leftrightarrow (x-4)(x-5)(x-3)=0$, adică $x\in\{3,4,5\}$.

c) Luăm, de exemplu, $a-4=\frac{2}{3}$ și $b-4=\frac{3}{2} \Rightarrow a\circ b=1+4=5\in\mathbb{N}$.

Soluție

1. **a)** Se obține $\det(A) = 0$.

b) Se obține $A^2 + A^3 = -A + A = O_2$.

c) Se deduc relațiile $A^{2k} = -A$ şi $A^{2k-1} = A, \forall k \in \mathbb{N}^*$ şi se obține rezultatul $A + 2 \cdot A^2 + ... + 10 \cdot A^{10} = -5 \cdot A$.

2. **a)** Se obține descompunerea $g = (X-1)(X-2)$.

b) g nu divide f pentru că $f(1) \neq 0$.

c) Se utilizează teorema împărțirii cu rest. Se obține restul $r = 1$.

Soluție

1. **a)** Se obține sistemul de ecuații $\begin{cases} vx + y = 0 \\ 9x + vy = 0 \end{cases}$, de unde rezultă $x(v^2 - 9) = 0.$

b) $\det V \neq 0 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$.

c) Sistemul este nedeterminat, având o infinitate de soluții de forna $(\alpha, -3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. De exemplu, trei soluții distincte ale sistemului sunt $(0,0), (-1,3), (1,-3)$.

2. **a)** $x \circ (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3 - 1} = -1$.

b) $(x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2} = x \circ (y \circ z) \Rightarrow$ legea este asociativă.

c) Din **a)** și **b)** rezultă $(-4) \circ (-3) \circ ... \circ 3 \circ 4 = (-4) \circ 4 \circ (-3) \circ 3 \circ (-2) \circ 2 \circ (-1) \circ 1 \circ 0 =$
$= (-1) \circ (-1) \circ (-1) \circ (-1) \circ 0 = -2$.

Soluție

1. **a)** Se verifică prin calcul direct.

b) Se obține $A^2+B^2=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) Se obține $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. **a)** Se obține $\sqrt{2}\circ\left(\sqrt{2}\right)=40$

b) $x\circ y=xy+7x+7y+42=x\left(y+7\right)+7\left(y+7\right)-7=\left(x+7\right)\left(y+7\right)-7$.

c) Ecuația se scrie în forma $(x+7)^3-7=x$ și se obțin soluțiile $x_1=-8$, $x_2=-7$, $x_3=-6$.

Soluție

1. **a)** Valoarea determinantului este $D(9) = 96$.

b) Se rezolvă ecuația $2a^2 - 8a + 6 = 0$ şi se obțin soluțiile $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.

c) Avem $D\left(3^x\right) = 0 \Leftrightarrow 2(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ de unde se obțin soluțiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

2. **a)** Avem $2 * 3 = 2 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0,$ deci $k = 2.$

b) Pentru $k = 2$ avem $M = [2, \infty)$ şi $x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Avem de rezolvat ecuația $x^2 - 4x = 0$, cu $x \in [2, \infty).$ Ecuația are soluțiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 4$, dar cum $x \in [2, \infty)$, rezultă că ecuația are o singură soluție în $M = [2, \infty)$, adică $x = 4$.

c) Avem de demonstrat inegalitatea $xy - k(x + y) + k^2 + k \geq k$, pentru orice $x, y \in M.$ Inegalitatea se scrie în forma $(x - k)(y - k) \geq 0$, care este adevărată pentru orice $x, y \in M$.

Soluție

1. **a)** Se obține rezultatul $A^2 + A = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Avem de rezolvat ecuația $2 \cdot 5^n - 125 = 5^n$. Se obține soluția $n = 3$.

c) Se obține $B = \begin{pmatrix} 5 + 5^2 + ... + 5^{2009} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{de 2009 ori} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \dfrac{5^{2009} - 1}{4} & 0 \\ 0 & 2009 \end{pmatrix}$ şi $B^t = B$.

2. **a)** Din condițiile $f(0) = 0$ şi $f(1) = 0$ se obțin valorile $m = -1$ şi $n = 0$.

b) Avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4) = 2$ și folosind relațiile lui Viete se obține valoarea $m = -1$.

c) Avem $f = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ factori care sunt ireductibili pentru că au $\Delta < 0$.

Soluție

1. **a)** Se verifică prin calcul direct.

b) Se obține rezultatul $A^2 + B^2 = 5^2 \cdot I_2$.

c) Se foloseşte relația $C = A + B = 5 \cdot I_2$.

2. **a)** Se obțin valorile $a = -3$ şi $b = 1$.

b) Se obține $f = (X - 3)(X - 1)(X^2 + X + 2)$.

c) Ecuația se scrie în forma $(3^x)^4 - 3 \cdot (3^x)^3 + (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$. Folosind rezultatul de la punctul precedent, se obțin soluțiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 0$.

Soluție

1. **a)** Se obține $m = 2$.

b) Se obține sistemul $\begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ (m+1) + 4 - 9 = -2 \end{cases}$, care are soluția $m = 2$.

c) Pentru $m = -1$ soluția sistemului este tripletul $(4;8;-6)$.

2. **a)** Se obține câtul de $X - 9$ și restul egal cu 0.

b) Se înlocuiesc rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ în ecuația $f(x) = 0$ și se adună relațiile obținute.

c) Folosind rezultatul de la punctul **a)** ecuația se scrie în forma $\left((3^x)^2 - 1\right)\left(3^x - 9\right) = 0$ și se obțin soluțiile reale $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$.

Soluție

1. **a)** Ecuația dreptei A_1A_2 este $2x - y + 1 = 0$

   b) Folosind formula de calcul $S = \frac{1}{2}|\Delta|$ pentru aria triunghiului OA_1A_2 se obține rezultatul $S = \frac{1}{2}$.

   c) Se consideră trei puncte $A_m(m, 2m+1); A_p(p, 2p+1); A_q(q, 2q+1)$, $m, p, q \in \mathbb{N}$, pentru care se verifică condiția de coliniaritate.

2. **a)** Se verifică prin efectuarea înmulțirii $A(a) \cdot A(b)$

   b) Are loc egalitatea $A(a) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(a) = A\left(2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = A(a)$, deci $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este elementul neutru față de operația de înmulțire a matricelor din mulțimea M.

   c) Are loc egalitatea $A(1) \cdot A(x) = A(2x) = A\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, deci simetricul matricei $A(1)$ față de înmulțirea matricelor din mulțimea M este $A\left(\frac{1}{4}\right)$.

Soluție

1. **a)** Pentru valorile $a=1, b=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G$**,** iar pentru valorile

$b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow a^2 \neq 1 \Rightarrow O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \notin G$.

b) Se obține matricea $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

c) $\det(A)=a^2=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, se determină matricele A^t, A^* și se obține $A^{-1}=A^* \in G$, oricare ar fi matricea $A \in G$.

2. **a)** Din condiția $f(-2)=0$ se obține valoarea $a=-4$.

b) Se obțin soluțiile $x_1=-2$, $x_2=3+\sqrt{2}$, $x_3=3-\sqrt{2}$.

c) Se înlocuiesc soluțiile x_1, x_2, x_3 în ecuația $f(x)=0$ și se adună relațiile obținute.

Soluție

1. **a)** Ecuația dreptei B_1B_2 este $2x+y=0$.

b) Se verifică egalitatea coordonatelor punctelor A_n și B_n, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Se verifică condiția de coliniaritate a punctelor A_1, A_2, A_n, oricare ar fi $n\geq 3$.

2. **a)** Prin calcul se obține câtul $q=X^2+2X+4$ și restul $r=7X+5$.

b) Din egalitatea $y^2-y-1=0$ se obține $y^2=y+1$, adică $y^3=y^2+y\Rightarrow y^3=2y+1$.

c) Din teorema împărțirii cu rest rezultă $f(y)=\left(y^2-y-1\right)\left(y^2+2y+4\right)+7y+5$. Din punctele anterioare avem $y^2-y-1=0$ și $7y+5\notin\mathbb{Q}$, deci $f(y)\notin\mathbb{Q}$.

Soluție

1. **a)** Ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 este $-3x+y+8=0$.

b) Folosind formula $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$ se obține rezultatul $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$.

c) Se verifică condiția de coliniaritate a punctelor A_1, A_2, A_n, oricare ar fi $n\geq 3$.

2. **a)** Se obține $f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{2}$.

b) **S**oluțiile ecuației $f(x)=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5[X]$ sunt $x_1=\hat{2}$ și $x_2=\hat{4}$

c) Se obține câtul $q=X^2+\hat{4}X+\hat{3}$ și restul $r=\hat{0}$.

Soluție

1. **a)** Se obține rezultatul $\det(I_3 + B) = 1$.

b) Se obține $f(A) = A^2 - 3A + I_3 = I_3 + B$.

c) Din punctul **b)** rezultă $\left(f(A)\right)^3 = \left(I_3 + B\right)^3 = I_3 + 3B + 3B^2 + B^3$ şi $B^3 = O_3$.

2. **a)** Se rezolvă ecuația $(x-3)^2 - 2(x-3) = 0$, care are soluțiile numere întregi $x_1 = 3$ şi $x_2 = 5$.

b) Se obține valoarea $a = 3$.

c) Soluția sistemului de ecuații este perechea ordonată $(4, 2)$.

Soluție

1. **a)** Pentru valorile $a=1; b=0 \Rightarrow a^2-3b^2=1 \Rightarrow I_2 \in G$ **,** iar pentru valorile $a=b=0 \Rightarrow a^2-3b^2 \neq 1 \Rightarrow O_2 \notin G$

b) Se verifică egalitatea prin calcul.

c) Folosind egalitatea $A \cdot A^{-1} = I_2$, se obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix} \in G$, oricare ar fi matricea $A \in G$.

2. **a)** Din condiția $f(1)=0$ se obține $m=-9$.

b) $f\left(\sqrt{2}\right) = 2m\sqrt{2} + 22 + 7\sqrt{2} + m \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}\left(2m+7\right) + m + 22 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = -\frac{7}{2}$.

c) Se folosesc relațiile între soluțiile și coeficienții ecuației $f(x)=0$ şi se obține rezultatul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{247}{81}$.

Soluție

1. **a)** Folosind formula $S=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, se obține $S=13$.

b) Pentru $a=-2$ ecuația dreptei care trece prin punctele B şi C este $y+2=0$

c) Condiția de coliniaritate a punctelor B,C,M este verificată dacă are loc egalitatea $(a+2)x-3(a+2)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Se obține valoarea de $a=-2$.

2. **a)** Din relațiile lui Viète se obține $a=-3$.

b) Din condiția $f(\sqrt{2})=0$ se obține $a=-3$.

c) Se obține descompunerea $f=(X-1)(X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

Soluție

1. **a)** Se înlocuieşte tripletului $(2,1,-1)$ în sistemul de ecuații şi se obține $m=3$.
   b) Se obține ecuația $m^2+2m-15=0$, care are soluțiile reale $m_1=3$ şi $m_2=-5$.
   c) Pentru $m=-5$ soluția sistemului de ecuații este tripletul $(0,3,1)$
2. **a)** Din relațiile lui Viète rezultă $m=0$.
   b) Din condiția $f(\sqrt{3})=0$ se obține $m=0$.
   c) Se obține descompunerea $f=\left(X-1\right)\left(X^2-3\right)$.

Soluție

1. **a)** Se obține rezultatul $\det\left(A(4)\right)=6$.

b) Din condiția de existență a matricei inverse $\det\left(A(a)\right)\neq 0$ rezultă $(a-2)(a-1)\neq 0$. Deci matricea $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

c) Soluția sistemului este tripletul $(1,0,0)$ oricare ar fi numărul $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

2. **a)** Din relațiile lui Viète rezultă $a=2$.

b) Se obține $a=2$.

c) Rădăcinile raționale posibile sunt printre divizorii termenului liber. Conform cerinței avem de verificat divizorii pozitivi ai lui -4. Polinomul f_a nu admite rădăcină $x=1$ oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$ Pentru $x=2$ se obține $a=-2$, pentru $x=4$ se obține $a=-5$.

Soluție

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix}$.

b) $aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $bA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $XA = \begin{pmatrix} ay & x+by \\ at & z+bt \end{pmatrix}$; $AX = \begin{pmatrix} z & t \\ ax+bz & ay+bt \end{pmatrix}$.

Obținem $z = ay$ şi $t=x+by$, deci $X = \begin{pmatrix} x & y \\ ay & x+by \end{pmatrix} = xI_2 + yA$; $m = x$ şi $n = y$.

2. a) $f(1) = a-1$; $f(1) = 0$, $a = 1$.

b) $f = X^4 + X^3 - X - 1$; $f = (X+1)(X-1)(X^2+X+1)$; $x = \pm 1$.

c) Rădăcinile raționale sunt printre divizorii termenului liber. Singurele rădăcini raționale sunt ± 1, care sunt întregi.

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ **;** $2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

c) $AX = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$; $AXB = \begin{pmatrix} x+y+z+t & -x-y-z-t \\ x+y+z+t & -x-y-z-t \end{pmatrix}$;

$AXB = (x+y+z+t)B \Rightarrow x+y+z+t = 0$.

2. a) $g^2 = X^2 + X + X + \hat{1}$; $g^2 = X^2 + \hat{1} = f$.

b) $f + g = X^2 + X$; $c = \hat{1}, r = X + \hat{1}$.

c) Numărul funcțiilor de la o mulțime cu 3 elemente la una cu 2 elemente: $2^3 = 8$.

Soluții

1. **a)** $a=1, b=0 \Rightarrow I_2 \in M$.

b) $A=aI_2+bV=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$; $\det A=a^2$. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$.

c) $V^2=O_2$; $A\cdot B=(a_1I_2+b_1V)(a_2I_2+b_2V)=a_1a_2I_2+(a_1b_2+a_2b_1)V$, care este din $\mathcal{M}$, deoarece $a_1a_2, a_1b_2+a_2b_1\in\mathbb{R}$.

2. **a)** Prin calcul.

b) Legea este comutativă și
$x*e=x \Leftrightarrow (x-5)(e-5)+5=x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x-5)(e-6)=0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e=6$.

c) $x*x=(x-5)^2+5$; $x*x*x=(x-5)^3+5$. Soluțiile sunt: 4, 5, 6.

Soluții

1. **a)** $I_2^t = I_2$; $I_2 + I_2^t = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $mA = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}$; $(mA)^t = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}$; $mA^t = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}$.

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow a = d = 0, c = -b$, deci $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $x * x = x \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)^2 = x - \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ sau $x = \sqrt{2} + 1$.

b) $(x * y) * z = x * (y * z) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(y - \sqrt{2}\right)\left(z - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$

c) Legea este comutativă și $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = \sqrt{2} + 1$.

Soluții

1. a) $\begin{cases} x=0 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$; $x=0, y=1, z=0$.

b) $\det A=(a-b)(b-c)(c-a)$.

c) $\Delta_x=\Delta_z=0, \Delta_y=\det A$; $x=0, y=1, z=0.$

2. a) $(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z+2m, \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) $m=6$.

c) $m=\sqrt{2}$.

Soluții

1. **a)** $A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $\det A(1,1)=1$.

b) $A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2-(b_1+b_2)\end{pmatrix}$, cu elemente din $\mathbb{R}\Rightarrow A+B\in\mathcal{M}$.

c) $A(0,b)=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & -b\end{pmatrix}$, $I_2-A(0,b)=\begin{pmatrix}1 & -b\\ b & 1+b\end{pmatrix}$; $\det(I_2-A(0,b))=1+b+b^2$

$1+b+b^2=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall b\in\mathbb{R}$.

2. a) $g(\hat{0})=\hat{1}$.

b) $f=X\left(X^2+\hat{2}\right)$; $\hat{1}^2=\hat{2}^2=\hat{1}$, $f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(\hat{2})=\hat{0}$.

c) $h=aX^3+bX^2+cX+d$, $h(\hat{0})=d\Rightarrow d=\hat{0}$, $h(\hat{1})=a+b+c=\hat{0}$, $h(\hat{2})=\hat{2}a+b+\hat{2}c=\hat{0}\Rightarrow b=\hat{0}$ şi $a+c=\hat{0}$.

Soluțiile: $a=\hat{2},\ b=\hat{0},\ c=\hat{1},\ h=\hat{2}X^3+X$ sau $a=\hat{1},\ b=\hat{0},\ c=\hat{2}\Rightarrow h=X^3+\hat{2}X$.

Soluții

1. **a)** $y = x$.

b) $A = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1$.

c) $(p-n)(p-m)(n-m)$ este număr par deoarece din trei numere naturale, cel puțin o pereche au aceeași paritate. Atunci $\frac{1}{2}(p-n)(p-m)(n-m)$ este întreg, deci aria e număr natural.

2. a) $f(1) = m^2 + 8m + 15$; $f(1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-5, -3\}$.

b) Suma rădăcinilor polinomului este $-\frac{4m}{4} = -m \Rightarrow m = 0$.

c) $f(X) = 4X^2\left[\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 - 5\left(X + \frac{1}{X}\right) + 6\right]$; $Y = X + \frac{1}{X} \Rightarrow y \in \{2, 3\}$, $x_1 = x_2 = 1, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Soluții

1. **a)** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $XY = \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $XY \in \mathcal{M}$, deoarece are elementele din $\mathbb{Z}$ şi forma matricelor din $\mathcal{M}$.

c) $U = \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; VU = \begin{pmatrix} 1 & a+m & c+p+an \\ 0 & 1 & b+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $UV = \begin{pmatrix} 1 & a+m & c+p+an \\ 0 & 1 & b+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$VU = UV \Leftrightarrow an = bm, \forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0, n = 0, p \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

2. a) $f = \left(X^2 - 2X + 1\right)^2 = \left(X - 1\right)^4$; $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

b) Se efectuează înmulțirile sau se descompune cu formula diferenței de pătrate.

c) $\Delta_1 = -4a, \Delta_2 = 4a$; $\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0, \Delta_2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$. Deci $a = 0$.

Soluții

1. a) $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}$.

b) $XX^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$.

$\det\left(XX^t\right) = \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) - \left(ab+cd\right)^2 = \left(ad-bc\right)^2$.

c) $\det\left(XX^t\right) = 0 \Rightarrow ad = bc$; obținem $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

2. a) $\left(x \circ y\right) \circ z = xyz - xy - xz - yz + x + y + z$; $x \circ \left(y \circ z\right) = xyz - xy - xz - yz + x + y + z$.

b) $x \circ y > 1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(y-1\right) > 0$. E adevărat pentru că $x > 1, y > 1$.

c) $x \circ a = a \Leftrightarrow x\left(a-1\right) - 2\left(a-1\right) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 1$.

Soluții

1. **a)** $I_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $f(I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $(A+B)^t = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$; $A^t + B^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$.

c) $A + A^t = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow a = d = 0, b+c = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

$\det A = ad - bc = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$, deci $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$, $a = 5$.

b) $x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + x + 1) = 0$.

Deci soluțiile reale sunt: $x_1 = x_2 = 1$.

c) Soluțiile întregi sunt printre divizorii termenului liber, adică ± 1.
Pentru $x = 1$, $a = 1$; pentru $x = -1$, $a = -1$.

Soluții

1. a) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B^2 = 3B$.

b) $mI_3 + nB = \begin{pmatrix} m+n & n & n \\ n & m+n & n \\ n & n & m+n \end{pmatrix}$, $n, m+n \in \mathbb{Z}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$, $a^2+2b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0 \Rightarrow 2ab+b^2=0 \Rightarrow A=O_3$.

2. a) Prin calcul direct.

b) $f = \left(X^2-7\right)\left(X^2-5\right)$. Rădăcinile $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{7}$ nu sunt întregi.

c) $f = \left(X-\sqrt{5}\right)\left(X+\sqrt{5}\right)\left(X-\sqrt{7}\right)\left(X+\sqrt{7}\right)$.

Soluții

1. **a)** $A+F=\begin{pmatrix}2 & a & b+1\\ 0 & 2 & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $a=3, b=3, c=5$.

b) $\det F=1\neq 0$, deci F este inversabilă; $F^{-1}=F^{*}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) $X=F^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -6\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

2. **a)** Se efectuează înmulțirile şi se reduc termenii asemenea.

b) $x*(y*z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$; $(x*y)*z=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$.

c) $x*(1-x)=0 \Leftrightarrow 2x(1-x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0,1\}$.

Soluții

1. **a)** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(a-7)$.

b) $\Delta = -16, \Delta_x = -60, \Delta_y = 12, \Delta_z = -4$; $x = \frac{15}{4}, y = -\frac{3}{4}, z = \frac{1}{4}$.

c) Din ultima ecuație $\Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow x_0 + y_0 = 4, x_0 - 2y_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{3}, x_0 = \frac{13}{3}$; $b = \frac{10}{3}$.

2. a) $f(5) = 0,\ g(5) = -2 \Rightarrow f(5) + g(5) = -2$.

b) $a_0 + a_1 + ... + a_{2009} = g(1) = -\left(5^{2009} + 5\right) < 0$.

c) Conform teoremei împărțirii cu rest avem: $g(X) = f(X) \cdot h(X) + aX + b,\ f(X) = (X-5)(X-7)$.
$g(5) = 5a + b = -2,\ g(7) = 7a + b = 2 \Rightarrow a = 2,\ b = -12$, deci restul este $2X - 12$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. **a)** $a = c = 1, b = 0$; $0,1 \in \mathbb{R}$.

b) $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$. Elementele sunt numere reale.

c) $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 + b_1c_2 - b_2c_1 \\ -(a_1b_2 - a_2b_1 + b_1c_2 - b_2c_1) & 0 \end{pmatrix}$;

$\det(AB - BA) = (a_1b_2 - a_2b_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2 \geq 0$.

2. **a)** $x * 4 = 10 \Leftrightarrow -2x + 6 = 10 \Leftrightarrow x = -2$.

b) $x * a = a \Leftrightarrow x(2 - a) = 2 - a, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 2$. Legea este comutativă, deci $a * x = x * a$.

c) Un element al compunerii este $\frac{4018}{2009} = 2$. Deci $x * 2 * y = 2 * y = 2$.

Soluții

1. **a)** $\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. $\det A_1 = 0$ (are 2 coloane egale).

b) A doua ecuație are soluția dată pentru $a = -8$, iar a treia pentru $a = 10$.

c) Dacă $y + z = 3 \Rightarrow x = 3$ (din prima ecuație); scăzând ultimele 2 ecuații $\Rightarrow 2(y+z) + a(y+z) = 6$, deci $a = 0$; $y + z = 3$, $2y + 3z = 7 \Rightarrow y = 2$, $z = 1$.

2. a) $x \perp (-1) = x + (-1) + 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$; $(-1) \perp x = -1 + x + 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

b) $(x \circ y) \circ z = a^2x + aby + bz - a - 1$; $x \circ (y \circ z) = ax + aby + b^2z - b - 1$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = b = 1$ sau $a = b = 0$.

c) $f(x \perp y) = x + y + 3$; $f(x) \circ f(y) = x + y + 3$.

Soluții

1. **a)** $\Delta = -7$.

b) $\Delta_x = -7, \Delta_y = -7, \Delta_z = 0$; $x = 1, y = 1, z = 0$.

c) $x = y + z = 1$; $y = 1, z = 0 \Rightarrow a = 0$.

2. a) $f(2) = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

b) $f = X\left(X^2 - 2X + 4\right) - 8 \Rightarrow$ câtul este $c(X) = X$ şi restul este $r = -8$.

c) $X_1 + X_2 + X_3 = 2$ şi $X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = a \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 4 - 2a$. Dacă $a > 2 \Rightarrow 2a > 4$ $\Rightarrow 4 - 2a < 0 \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 < 0 \Rightarrow$ există cel puțin o rădăcină care nu este reală.

Soluții

1. **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix}$; $\det(A - xI_2) = x^2 - 2$; $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

c) $A^4 \cdot X = \left(A^2\right)^2 \cdot X = (2I_2)^2 = 4X$ şi la fel $X \cdot A^4 = 4X$.

2. a) $3, 2 \in \mathbb{Z}$ şi $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$, deci $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

b) $x = a_1 + b_1\sqrt{2}, y = a_2 + b_2\sqrt{2}, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ şi $a_1^2 - 2b_1^2 = 1, a_2^2 - 2b_2^2 = 1$;

$xy = \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = \left(a_1a_2 + 2b_1b_2\right) + \left(a_1b_2 + a_2b_1\right)\sqrt{2}$; $a_1a_2 + 2b_1b_2$, $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$;

$\left(a_1a_2 + 2b_1b_2\right)^2 - 2\left(a_1b_2 + a_2b_1\right)^2 = \left(a_1^2 - 2b_1^2\right)\left(a_2^2 - 2b_2^2\right) = 1$.

c) $x = a + b\sqrt{2}, a^2 - 2b^2 = 1 \Rightarrow x \neq 0$; $x^{-1} = a - b\sqrt{2}, a^2 - 2(-b)^2 = 1 \Rightarrow x^{-1} \in G$.

Soluții

1. **a)** $a = b = c = d = 0$; $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow O_3 \in \mathcal{M}$.

b) $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & a_1c_2 + c_1a_2 + b_1d_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1d_2 + d_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}$; are elementele în $\mathbb{R}$, cele de pe diagonală egale și 0 sub diagonală, deci matricea produs este din $\mathcal{M}$.

c) $\det A = a^3$; $a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = O_3$.

2. a) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$; $q = X^2 - X, r = 1$.

b) $f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -a - b - 1$. Restul împărțirii la $X^2 + 1$ este $(b+1)X - 2a - b$; $a = b = 0, c = -1$.

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1x_2 + ... + x_3x_4 = a$; $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 - 2a$; $1 - 2a < 0 \Rightarrow$ nu pot fi toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) $\det(A) = ad - bc = 1$.

b) $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$.

c) S = $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd = (a+c)^2 + (b+d)^2$. S = 0 $\Leftrightarrow a + c = 0$ şi $b + d = 0$; det$A$ = 0.

2. a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$.

b) $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$; $f = X(X+2)(X+1)(X-1)$; $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$.

c) Din prima relație $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = -1$; $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = a \Rightarrow x_1x_4 + x_2x_3 = a - 1$

$x_1x_4(x_2 + x_3) + x_2x_3(x_1 + x_4) = -b \Rightarrow x_1x_4 + x_2x_3 = b$.

Soluții

1. **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

b) $(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$; $(a+d)A-(ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

c) $A^2M = (a+d)AM-(ad-bc)M$; $MA^2 = (a+d)MA-(ad-bc)M$; $a+d \neq 0 \Rightarrow AM = MA$.

2. a) $f = X^3-2X^2+X$; $f = X^3-2X^2+X$; $f = X(X-1)^2$; $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$.

b) $x_1+x_2+x_3 = 2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = a$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 2 \Leftrightarrow 4-2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

c) $x_1^2x_2^2x_3^2 = b^2 = -b \Rightarrow b = 0$ sau $b = -1$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = x_1+x_2+x_3 \Leftrightarrow a = 1$; $a = 1$ și $b = 0$.

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(M(1,1)) = 1$, $(M(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y & -y \\ 4y & x-2y \end{pmatrix}$. $\det(M) = x^2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^*$.

2. a) $f(-p) = 1$.

b) $f(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + p = 0 \Leftrightarrow p = -2$.

c) $x_1 + x_2 + x_3 = -p, x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2, x_1x_2x_3 = -1$.
$\Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = 0 - 2\cdot(-1)\cdot(-p) = -2p \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = p^4 + 4p$.

Soluții

1. **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $4A^2 - 5A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $mA^2 + nA + pI_3 = \begin{pmatrix} 4m+2n+p & 0 & 0 \\ 0 & m+n+p & 0 \\ 0 & 2m+n & m+n+p \end{pmatrix}$.

Identificând elementele obținem $m = \frac{1}{2}, n = -2, p = \frac{5}{2}$.

2. a) A doua ecuație $\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{2}$; $x_1x_2x_3 = -4$.

b) $s_1 = x_1 + x_2 + x_3, s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, s_3 = x_1x_2x_3$; ecuația $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0$ ecuația cerută $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$, deci $a = -2, b = -2, c = 4$.

c) $f = (x-2)\left(x^2 - 2\right) = (x-2)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$.

Soluții

1. a) $X^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $\det(X)=1, X^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, X^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c) $X^3=\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$, $3X^2+rX+I_3=\begin{pmatrix}r+4&6+r&9+r\\0&r+4&6+r\\0&0&r+4\end{pmatrix}$. Identificând elementele, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, obținem $r=-3$.

2. a) $2008\circ(-2008)=2^0=1$.

b) $x\circ x^2=64\Leftrightarrow x+x^2=6\Leftrightarrow x\in\{-3,2\}$.

c) $(x\circ y)\circ z=2^{x+y}\circ z=2^{2^{x+y}+z}$; $2^{2^{x+y}+z}=2^{z+1}\Rightarrow 2^{x+y}+z=z+1\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x=-y$.

Soluții

1. **a)** $M_1+M_2=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$; $\det\left(M_1+M_2\right)=4$.

b) $M_a^2=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}$.

c) $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$, $M_aX=\begin{pmatrix}x+az&y+at\\z&t\end{pmatrix}$, $XM_a=\begin{pmatrix}x&ax+y\\z&az+t\end{pmatrix}$;

$x+az=x, y+at=ax+y, z=z, t=az+t, \forall a\in\mathbb{R}$; obținem $z=0$; $t=x$, deci $X=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

2. a) $x*0=x$.

b) $x*(y*z)=x*\sqrt[3]{y^3+z^3}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$; $(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+y^3}*z=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.

c) $x_1=\sqrt[3]{2x_0^3}=\sqrt[3]{2}x_0$. Prin inducție: $x_n=\sqrt[3]{n+1}\cdot x_0$; $x_7=\sqrt[3]{8}x_0=2x_0\in\mathbb{Q}$, pentru $x_0\in\mathbb{Q}$.

$x_2=x_0*x_1=\sqrt[3]{x_0^3+2x_0^3}=x_0\sqrt[3]{3}$; $x_3=x_0*x_2=\sqrt[3]{x_0^3+3x_0^3}=x_0\sqrt[3]{4}$, $x_0\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow x_3\notin\mathbb{Q}$.

Soluții

1. a) $a=1, b=c=0$; 0 şi $1 \in \mathbb{R}$.

b) $A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$. Elementele sunt numere reale.

c) $AB-BA=\begin{pmatrix} b_1c_2-b_2c_1 & 0 \\ 0 & b_2c_1-b_1c_2 \end{pmatrix}$; $\det\left(AB-BA\right)=-\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2 \le 0$.

2. a) $f=X^2+X+1$; $f\left(\hat{1}\right)=\hat{0}$.

b) $b=\hat{1}, \hat{1}+a+\hat{1}=\hat{1} \Rightarrow a=\hat{2}$.

c) 9 = numărul funcțiilor de la o mulțime cu 2 elemente la una cu 3 elemente.

Soluții

1. **a)** Se obține $\det\left(H(a)\right) = a$.

b) $H(a)\cdot H(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = H(a\cdot b),\ \forall a,b>0.$

c) $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2009) = \begin{pmatrix} 2009 & \ln 2009! & 0 \\ 0 & 2009 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2009\cdot 2010}{2} \end{pmatrix}$

Calculul determinantului $\Delta = 2009^3\cdot 1005.$

2. **a)** $x\circ y = xy-2(x+y)+6 = xy-2x-2y+6 = (x-2)(y-2)+2.$

b) Pentru $x,y\in G \Rightarrow (x-2)(y-2)>0 \Rightarrow x\circ y>2.$ Deci $x\circ y\in G.$

c) Se determină e. Obținem $xe-2x-2e+6 = x \Rightarrow e=3.$

Obținem $xx'-2x-2x'+6=3 \Rightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2} = 2+\dfrac{1}{x-2} > 2,\ \forall x\in G.$

Soluții

1. **a)** Se obține $A^2 = 3A$.
   b) $A^{10} = 3^9 A$, deci $\det\left(A^{10}\right) = 0$.
   c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\det B = 4 \neq 0$. Deci B este inversabilă. Prin calcul $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. **a)** $x^{3\ln e} = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$
   b) Pentru $x, y \in (0,\infty)\setminus\{1\} \Rightarrow x^{3\ln y} > 0$ și $x^{3\ln y} \neq 1 \Rightarrow x \circ y \in G.$
   c) $x \circ (y \circ z) = x^{9\ln y \cdot \ln z} = (x \circ y) \circ z.\ \forall x, y, z \in G.$

Soluții

1. a) Se determină punctele $A_0(0,2)$ și $A_1(1,3)$. $A_0A_1: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Finalizare $x - y + 2 = 0$.

b) $A_2(2,4)$. Atunci $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A_0, A_1, A_2$ coliniare.

c) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & n+2 & 1 \\ n+1 & n+3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow A = 1.$

2. a) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{37}{8}.$

b) Relația se scrie $f(a) = -5.$ Se obține $a \in \{-1, 0, 1\}.$

c) $\Delta = 0$ pentru că $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Soluții

1. **a)** Se verifică, înlocuind în fiecare ecuație a sistemului, $x=0, y=3$ şi $z=1$.

b) Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul; $\det(A)=-5m+15\neq 0$ pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Pentru $m\neq 3$ avem $\det A\neq 0.$ Se aplică regula lui Cramer. Obținem soluția $x=0,\ y=3,\ z=1$.

2. **a)** $x*y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3.$

b) Ecuația este echivalentă cu:

$2\left(5^x-3\right)^2=8\Leftrightarrow 5^x-3=\pm 2$ cu soluțiile $x=0$ şi $x=1$.

c) Se determină e. Obținem $2xe-6x-6e+21=x\Rightarrow e=\frac{7}{2}$.

Obținem $2xx'-6x-6x'+21=\frac{7}{2}\Rightarrow x'=\frac{12x-35}{4(x-3)},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Soluții

1. **a)** $A^2 = A \Rightarrow A + A^2 = 2A$.

b) $\det(X + A) = \begin{vmatrix} x+4 & -6 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 + x$. Se obține $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

Atunci $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Partea stângă se mai scrie $A + 2A + 3A + \ldots + nA = \left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) A = \frac{n\left(n+1\right)}{2} A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a)** Avem $f\left(2\right) = 0$. Obținem $m = -\frac{13}{2}$.

b) x_i, cu $i \in \{1, 2, 3\}$ sunt rădăcini ale polinomului f. Înlocuim şi obținem $x_i^3 + x_i^2 + mx_i + 3 = 0$.
Adunăm cele trei relații şi obținem $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Rădăcinile raționale se găsesc printre divizorii termenului liber. Deci 1 şi –1 sunt posibilele rădăcini raționale. Înlocuim în polinomul f şi obținem m = 1 sau m = –3, deci pentru m număr par f nu are rădăcini raționale.

Soluții

1. **a)** $\det(A) = -4 - 3 = -7.$

b) $A^2 = 7I_2 \Rightarrow A^3 = 7A.$

c) Se efectuează calculul $A \cdot B = A \cdot \left(A^2 - 6I_2\right) = A^3 - 6A = 7A - 6A = A.$

2. **a)** $X \cdot g + 1 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = f$

b) Polinomul g se scrie $g = \left(X^2 + 1\right)(X + 1) \Rightarrow x = -1$ este unica rădăcină reală.

c) Din punctul **a)** $\Rightarrow f(a) = a \cdot g(a) + 1$. Știind că $g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 1.$

Soluții

1. **a)** $A(1)\cdot A(-1)=A(-1)$.

b) $\left(A(x)\right)^2=\begin{pmatrix} 5x^2+10x+1 & -2x^2-4x \\ 10x^2+20x & -4x^2-8x+1 \end{pmatrix}=A\left((x+1)^2-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

c) $\det A(1)=2\neq 0.$ Deci matricea $A(1)$ este inversabilă. $A(1)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}.$

2. **a)** $0=0+0\sqrt{3}\notin G$ pentru că $0^2-3\cdot 0^2\neq 1.$

$1=1+0\sqrt{3},\quad 0,1\in\mathbb{Z}$ şi $1^2-3\cdot 0^2=1.$ Deci $1\in G.$

b) Fie $x,y\in G$

$x=a+b\sqrt{3},\quad a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1,\ \ y=c+d\sqrt{3},\ \ c,d\in\mathbb{Z},\ c^2-3d^2=1$

$xy=ac+3bd+(ad+bc)\sqrt{3}.$ Avem $ac+3bd, ad+bc\in\mathbb{Z}$ si $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=1.$

De unde rezultă concluzia.

c) $x\in G\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=a+(-b)\sqrt{3}\in G.$

Soluții

1. a) $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -5 & 4\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-5.$

b) $\det(A)\neq 0$. Sistemul are soluție unică şi aplicăm Regula lui Cramer. Obținem soluțiile: $x=\dfrac{4}{5}, y=\dfrac{4}{5}, z=\dfrac{3}{5}.$

c) Rezolvăm sistemul şi obținem $x=\dfrac{9a-5}{5}, y=\dfrac{14a-10}{5}, z=\dfrac{13a-10}{5}\Rightarrow a=5\in\mathbb{N}.$

2. a) $2008\circ 2009=4018.$

b) Inecuația se scrie $x^2+x-2\leq 0\Rightarrow x\in[-2,1].$

c) $C_n^0\circ C_n^1\circ C_n^2=n+6\Leftrightarrow n^2-n-6=0\Rightarrow n=-2\notin A$ şi $n=3\in A.$ Mulțimea A are un singur element.

Soluții

1. a) $\det A = 0$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $I_3 + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I_3 + A) = 1 \neq 0$. Matricea $I_3 + A$ este inversabilă.

$(I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $f(0) - f(1) = p - q - 1$.

b) $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = f(1) = 1 - p + q - r$.

c) $g = (X - 1)(X^2 + 2X + 3)$ care are doar o rădăcină reală.

Soluții

1. **a)** Se obține $a=1, b=\frac{1}{3}$.

b) $A^2=3I_2 \Rightarrow B=I_2$. Deci $A\cdot B=A$.

c) Fie $X\in C(A)$, $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci din $X\cdot A=A\cdot X$ obținem: $x=t, y=3z$.

Notăm $x=a\in\mathbb{R}, z=b\in\mathbb{R}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2. **a)** $x*x=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$, cu soluțiile $x_1=2\notin G$ şi $x_2=\frac{1}{2}\in G$.

b) Se verifică uşor prin calcul direct.

c) Pentru orice $x, y\in(-1,1)\Rightarrow 1+xy>0.$ Se demonstrează dubla inegalitate:

$-1<\frac{x+y}{1+xy}<1\Rightarrow x*y\in G.$

Soluții

1. a) $I_2 = I_2 + 0 \cdot A = X(0) \in G$.

b) Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ avem $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA^2$.

Observăm că $A^2 = 5A \Rightarrow$ concluzia.

c) Folosim relația de la punctul **b)** și comutativitatea înmulțirii în mulțimea G pentru a arăta că $X(a) \cdot X\left(\frac{-a}{1+5a}\right) = X(0) = I_2$.

2. a) $f(\hat{1}) = \hat{2},\ g(\hat{0}) = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0}) = \hat{0}$.

b) Înlocuim g și folosim proprietățile adunării și înmulțirii în $\mathbb{Z}_5$.

c) Înlocuim, pe rând, în polinomul f, necunoscuta X cu toate elementele din mulțimea $\mathbb{Z}_5$.

Obținem $f(\hat{4}) = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{0}$ este singura rădăcină a polinomului f.

Soluții

1. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6.$

b) $\det A = 3m + 3, \quad 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

c) Pentru $m \neq -1 \Rightarrow \det A \neq 0$, deci sistemul are soluție unică. Fiind un sistem omogen soluția este $x = y = z = 0.$

2. a) Aplicăm relațiile lui Viète pentru cele două polinoame: $S = -3, \quad S' = 2 \Rightarrow S - S' = -5.$

b) Folosim teorema împărțirii cu rest şi obținem câtul $q = X + 5$ şi restul $r = 12X - 4.$

c) Ştim că $g(y_1) = g(y_2) = 0;\ f = g(X+5) + 12X - 4.$ Deci $f(y_1) \cdot f(y_2) = (12y_1 - 4)(12y_2 - 4)$.
Folosim relațiile lui Viète şi obținem $f(y_1) \cdot f(y_2) = 64.$

Soluții

1. a) $\det A = 0.$

b) $A^2 = 10A,\ B^2 = 8A + I_3 \Rightarrow A^2 - B^2 = 2A - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 12 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$

c) $\det B = 9 \neq 0 \Rightarrow B$ inversabilă. Se arată prin calcul că $B \cdot \left(\frac{1}{9}A - I_3\right) = \left(\frac{1}{9}A - I_3\right) \cdot B = I_3.$

2. a) Se desfac parantezele şi se obține prin calcul $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}.$

b) $\exists e \in \mathbb{R}$ asfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x \circ e = e \circ x = x.$ Obținem $xe + 3x + 3e + 6 = x \Rightarrow e = -2.$

c) Folosim punctul a) şi avem $\left(C_n^2 + 3\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + 3 = \pm 4.$ Obținem soluția $n = 2.$

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul direct.

b) $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 1 \neq 0$. Deci matricea B este inversabilă. $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

c) $B^3 = 3A + I_2$, $B^2 = 2A + I_2 \Rightarrow B^3 - B^2 = A$. Se obține $x = 1$.

2. a) $f = \left(X^2 - 1\right)^2 \Rightarrow g / f$.

b) Folosim relațiile lui Viète. $S = 0, P = 1 \Rightarrow S \cdot P = 0$.

c) Se calculează rădăcinile polinomului f. $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 1$. Înlocuim şi obținem $T = 4$.

Soluții

1. **a)** Se rezolvă sistemul $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=2 \end{cases} \Rightarrow B(0,2)$.

b) Se determină coordonatele mijlocului segmentului AB: $C'(2,1)$

$$CC': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow CC': 2x - y - 3 = 0.$$

c) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$. Unde $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow A = 5.$

2. **a)** $S = \hat{4}$.

b) $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_8$ dacă $(a,8)=1.$ Deci elementele inversabile sunt $\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}.$

Produsul lor este $P = \hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7} = \hat{1}.$

c) Se vor folosi formulele lui Cramer. Scrierea matricei sistemului $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $\det A = \hat{5}$,

$\Delta_x = \hat{3},\ \Delta_y = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{7},\ y = \hat{4}.$

Soluții

1. **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4.$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = 1, z = t = \frac{1}{2}.$

c) $A \cdot B = I_2 \Rightarrow B^{-1} = A.$ Atunci $S = O_2.$

2. **a)** $x \circ x = 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = 12$ cu rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 6.$

b) $1 \circ (2 * 3) = 5 = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.

c) Sistemul se scrie echivalent $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 10 \end{cases}$ cu soluțiile $x = 9, y = -1.$

Soluții

1. a) Pentru $a=-1$ avem $\det A=-9\neq 0$ deci sistemul omogen are soluția unică $x=y=0$.

b) $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=\begin{pmatrix} a^2+8 & 2a+2 \\ 4a+4 & 9 \end{pmatrix}-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

c) Se obține $a=-1$.

2. a) $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z=x+y+z+22,\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

b) Ecuația se scrie echivalent $6x+55=1\Leftrightarrow x=-9$.

c) Asociativitatea a fost demonstrată la punctul **a)**, elementul neutru al legii este $e=-11\in\mathbb{Z}$, $\forall x\in\mathbb{Z},\ \exists x'\in\mathbb{Z}$, $x'=-x-22\in\mathbb{Z}$, iar legea este comutativă. În concluzie $(\mathbb{Z},\circ)$ este grup comutativ.

Soluții

1. **a)** $\det A = (x-3)^2 - 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 4, x_2 = 2$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix} = (2x-6)A - (x^2-6x+8) \cdot I_2$.

c) Folosim pct. **b)** și obținem $x = 4$.

2. **a)** $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = (x-2)(y-2) + 2$.

b) $x \circ 2 = 2x - 2(x+2) + 6 = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Folosim pct. **b)** și obținem $E = 2$.

Soluții

1. **a)** $\det(A) = a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$

   b) Pentru $a = 3 \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$ deci matricea A este inversabilă. Atunci se verifică că: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2.$

   c) Folosim punctul **b)** şi înmulțim expresia la stânga cu A^{-1}. Obținem $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

2. **a)** $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{4}{5}.$

   b) Prin înlocuire şi calcul se obține $f(x * y) = \frac{1 - x - y + xy}{1 + x + y + xy} = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in G.$

   c) $x * (y * z) = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} = (x * y) * z,\ \forall x, y, z \in G.$

Soluții

1. **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^2 = 0.$

c) Presupunem $A^2 = I_3$. Obținem $a^2 = 0, 3a^2 = 1$ și $a^2 = 1$. Contradicție.

2. **a)** $x * 2 = 2,\ 3 \circ x = 3$. Atunci $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Se determină $e_1 = 3, e_2 = 4$. Avem $e_1 * e_2 = 4$ și $e_1 \circ e_2 = 3 \Rightarrow (e_1 * e_2) + (e_1 \circ e_2) = 7.$

c) $f(x * y) = axy - 2ax - 2ay + 6a + 1$ și $f(x) \circ f(y) = a^2xy - 2ax - 2ay + 7 \Rightarrow a = 1.$

Soluții

1. a) $\det M = -x - y + 3.$

b) Se determină $C_2(3,0)$. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Punctele A, B, C_2 sunt coliniare.

c) $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ n+1 & 2-n & 1 \end{vmatrix} = 3n.$ Aria este minimă pentru $n = 1.$

2. a) $(x+3) \perp \left(\frac{1}{x}+3\right) = (x+3-3)\left(\frac{1}{x}+3-3\right)+3 = 4$.

b) Verificarea directă a relației: $x \perp e = e \perp x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$ Pentru $e = 4$ obținem $x \perp 4 = x$ și $4 \perp x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $x \perp x' = x' \perp x = e.$ Relația se mai scrie $x' - 3 = \frac{1}{x-3} \Rightarrow x' = \frac{1}{x-3} + 3.$ Deci $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\exists x' = \frac{1}{x-3} + 3$ astfel încât $x \perp x' = x' \perp x = e$.

Soluții

1. a) $S(0,0)=9.$

b) Calculul determinantului matricei sistemului $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -7\alpha - 7$. $\det A = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

$S(\alpha,\beta) = 9 + \alpha + \beta$. Obținem $S(\alpha,\beta) = -2 \Leftrightarrow \beta = -10$

c) Pentru $\alpha = \beta = 0$ avem $\det A = -7 \neq 0.$ Sistemul are soluție unică. Aplicăm regula lui Cramer şi obținem soluția $x = 10, y = -5, z = -10.$

2. a) Ecuația de gradul II are soluțiile: $x_1 = 2, x_2 = -1.$

b) g / f dacă rădăcinile lui g sunt rădăcini şi pentru f. Deci $f(2) = 0 \Leftrightarrow 2m + n = -7,$

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow m - n = -5$. Obținem $m = -4,\ n = 1$.

c) În condițiile de la punctul b) polinomul f se divide cu polinomul g. Atunci $f(2) = 0 \Rightarrow P = 0.$

Soluții

1. a) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

b) $\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$ Se calculează partea dreaptă a expresiei din enunț și se obține identitatea cerută.

c) Folosim pct. b) pentru $a = 2^x, b = c = 1.$ Obținem $\left(2^x + 2\right)\left(2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1\right) = 0$. Sau $\left(2^x + 2\right)\left(2^x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0.$

2. a) $(1 * 2) * (0 \circ 3) = 9$.

b) $a = 1$.

c) $f(x * y) = x * y + 6 = x + y + 9 = x + 6 + x + 6 - 3 = f(x) \circ f(y)$.

Soluții

1. a) $A^2 = O_2 \Rightarrow \det A^2 = 0.$

b) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci din $X \cdot A = A \cdot X$ obținem: $x = t, z = 0$.

Notăm $x = a \in \mathbb{R}, y = b \in \mathbb{R} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$

c) $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ atunci din $Y^2 = A$ obținem $x^2 + yz = 0,\ t^2 + yz = 0,\ y(x+t) = 1$ şi $z(x+t) = 0.$ Se obține o contradicție.

2. a) $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_6$ dacă $(a,6) = 1.$ Deci avem 2 elemente inversabile: $\hat{1}; \hat{5}.$

b) $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5} \Rightarrow x = \hat{2}$ şi $x = \hat{5}$. Atunci $S = \hat{1}$. $x^2 = x \Leftrightarrow x = \hat{0},\ x = \hat{1},\ x = 3,\ x = \hat{4}$. Atunci $P = \hat{0}$. $S + P = \hat{1}.$

c) $x^3 = \hat{0} \Leftrightarrow x = \hat{0} \Rightarrow P = \frac{1}{6}.$

Soluții

1. **a)** $A^2 = 2I_2$.

b) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\det(A + I_2) = 1 \neq 0$. Matricea $A + I_2$ este inversabilă.

$(A + I_2)(A - I_2) = (A - I_2)(A + I_2) = I_2$. Deci $(A + I_2)^{-1} = A - I_2$.

c) $\det(x^2 A) = -2x^4$, $x^2 \det(A) = -2x^2 \Rightarrow x^4 = x^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

2. **a)** $a = 3$.

b) Legea de compoziție devine $x * y = xy + 3x + 3y + 6$. Legea este comutativă, conform pct **a)**.

Relația precedentă se scrie $e(x + 3) = -2(x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = -2$.

c) $x(a - 3) + b - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ şi $b = 6$.

Soluție

1. a. $\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 8+2a+2+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow 4a+10 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{5}{2}$. Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-5}{2} \right\}$ matricea este inversabilă.

b. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -5a+2 & 2a-3 \\ 3 & a+20 & -13 \\ 1 & -a-12 & 7 \end{pmatrix}$.

c. Se rezolvă cu formulele lui Cramer $x = \frac{d_x}{d} = 2,\ y = \frac{d_y}{d} = 3$ şi $z = \frac{d_z}{d} = -1$.

2. a. Calculând avem $x \circ (y \circ z) = xyz + 4xy + 4xz + 4yz + 16x + 16y + 16z + 60$,
$(x \circ y) \circ z = xyz + 4xy + 4xz + 4yz + 16x + 16y + 16z + 60$ de unde $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

b. Din $x \circ (-4) = x \cdot (-4) + 4x + 4 \cdot (-4) + 12 = -4$ avem $x \circ (-4) \circ y = (-4) \circ y = -4y + 4 \cdot (-4) + 4y + 12 = -4$.

c. Folosind punctele **a)** şi **b)** rezultatul este -4.

Soluție

1.a. Ecuația dreptei este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{c_4} & y_{c_4} & 1 \\ x_{c_2} & y_{c_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & -n & 1 \\ n+1 & -n-1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} n & -n \\ n+1 & -n-1 \end{vmatrix} = n(-n-1) - (-n)(n+1) = 0 \Rightarrow$ punctele O, C_n, C_{n+1} sunt coliniare oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$.

c. Aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 3 - 6 - 6 - 1 = 3$, de unde aria triunghiului este $A = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{3}{2}$.

2.a. Pentru $x = 0$ avem $A_0 = \begin{pmatrix} 2009^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in G.$

b. $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2009^x \cdot 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2009^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}.$

c. Inmulțirea maticelor este asociativă. $I_3 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ este element neutru, iar

$A_{-x} = \begin{pmatrix} 2008^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \in G$ este matricea inversă a matricei A_x.

Soluție

1. a. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ atunci $A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}\in G$.

b. $C^2=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}\Rightarrow$ și $10C-16I_2=\begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$.

c. Condiția din enunț se mai scrie $x^2-y^2=2009 \Leftrightarrow x^2-y^2=41\cdot 49$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} x+y=49 \\ x-y=41 \end{cases}, \begin{cases} x=45 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow D=\begin{pmatrix} 45 & 4 \\ 4 & 45 \end{pmatrix}$.

2.a. Avem $f(0)=a_0 \Leftrightarrow f(0)=1^{2009}-(-1)^{2009}=1+1=2$

b. $f(1)+f(-1)=2^{2009}-(-2)^{2009}=2\cdot 2^{2009}$ nr. par.

c. $f(X)=\left(X+1\right)^{2009}-\left(X-1\right)^{2009}=0 \Leftrightarrow \left(X+1\right)^{2009}=\left(X-1\right)^{2009} \Leftrightarrow X+1=X-1 \Rightarrow 1=-1$, fals.

Deci numărul rădăcinilor reale este 0.

Soluție

1.a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b. Notăm $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ecuația devine $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ -x+2z & -y+2t \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$.

c. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - 4A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

2. a. $x \circ x = 2 \Leftrightarrow 2x - 14 = 2 \Leftrightarrow x = 8$.

b. $(x \circ y) \circ z = (x + y - 14) \circ z = x + y + z - 28 = x \circ (y \circ z)$.

c. asociativitatea din punctul **b)**; elementul neutru este $e = 14$; elementele simetrizabile $x' = 28 - x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
$x \circ y = x + y - 14 = y + x - 14 = y \circ x$.

Soluție

1.a. Avem $D(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1-1+1-1-1=-4.$

b. Avem $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=-(a-1)^2(a+2).$

c. Din $-(a-1)^2(a+2)=-4 \Leftrightarrow -(a+1)^2(a-2)=0 \Leftrightarrow a=-1$ sau $a=2.$

2.a. $x\circ y=xy-10(x+y)+110=xy-10x-10y+100+10=x(y-10)-10(y-10)+10=$
$=(x-10)(y-10)+10.$

b. $C_{10}^1\circ C_{20}^1=(10-10)(20-10)+10=10$.

c. $x\circ(x-1)=10 \Leftrightarrow (x-10)(x-11)+10=10 \Leftrightarrow (x-10)(x-11)=0 \Leftrightarrow x=10$ sau $x=11.$

Rezolvare

1. **a)** Se obține $\det(A(0)) = 0$.

   b) Folosind relațiile lui Viète se obține $A(1) + A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

   c) Pentru orice $k \in \{0,1,2\}$ se obține $2\left(x_k^2 + x_k - 2\right) + 3 = 3$.

2. **a)** $3 \circ e = 3^{2\ln e} = 9$.

   b) Fie $x, y \in G \Leftrightarrow x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1 \Rightarrow x^2 > 0$ și $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \circ y \in G$.

   c) $(x \circ y) \circ z = \left(x^{2\ln y}\right) \circ z = \left(x^{2\ln y}\right)^{2\ln z} = x^{4\ln y \ln z} = x \circ (y \circ z)$.

Rezolvare

1.a. Calculând avem $D(1,1,0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1-1=0.$.

b. Avem $D(a,a,x)=\begin{vmatrix}1 & x & a^2\\ 1 & a & ax\\ 1 & a & ax\end{vmatrix}=0$ linia 2 egală cu linia 3 .

c. Aplicând proprietațile determinanților,scăzând linia întâi din liniile doi și trei obținem

$$\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 1 & a & bx\\ 1 & b & ax\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 0 & a-x & b(x-a)\\ 0 & b-x & a(x-b)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(a-x)(b-x)\begin{vmatrix}1 & -b\\ 1 & -a\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(a-x)(b-x)(b-a)=0\Leftrightarrow$$

$x_1=a, x_2=b$ pentru $a\neq b.$

2.a Ecuația $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=0$ și $x_3=1$ de unde rezultă $S=\{0,1\}$.

b. $x^3-3x+a=0, se$ formeaza sistemul: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3\\ x_1x_2x_3=-a\\ x_1=x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=-2x_1\\ -3x_1^2=-3\\ 2x_1^3=a\end{cases}$

cu soluțiile: $x_1=1, x_2=1, x_3=-2$ și $a=2$.

c. $e^{f(x)}=g\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\Leftrightarrow e^{f(x)}=1\Leftrightarrow e^{f(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=1.$

Soluție

1. a. $f(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, f(1)=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix};\ f(0)+f(1)=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$.

b. $f(1)\cdot f(-1)=f(1-1)=f(0)=I_3$.

c. $f(x+y)=\begin{pmatrix}1&x+y&2(x+y)^2+2(x+y)\\0&1&4(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix};\ f(x)f(y)=\begin{pmatrix}1&x+y&2(x+y)^2+2(x+y)\\0&1&4(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.a. Adăugând la ambele părți ale ecuației $\hat{2}\cdot x+\hat{1} \Leftrightarrow \hat{2}\cdot \hat{x}+\hat{5}+\hat{1}=\hat{1}+\hat{1} \Leftrightarrow \hat{2}\cdot\hat{x}=\hat{2}\Rightarrow \hat{x}_1=\hat{1}$ și $\hat{x}_2=\hat{4}$.

b. $\Delta=\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{2}&\hat{3}\\\hat{2}&\hat{3}&\hat{1}\\\hat{3}&\hat{1}&\hat{2}\end{vmatrix}=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{2}\cdot\hat{1}\cdot\hat{3}+\hat{3}\cdot\hat{2}\cdot\hat{1}-\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}-\hat{1}\cdot\hat{1}\cdot\hat{1}-\hat{2}\cdot\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{4}=\hat{0}$.

c. $\hat{3}x=\hat{3}$ de unde $\hat{x}=\hat{1},\ \hat{y}=\hat{2}$ sau $\hat{x}=\hat{3},\ \hat{y}=\hat{4}\Rightarrow$ soluțiile $\hat{x}=\hat{1},\ \hat{y}=\hat{2}$ sau $\hat{x}=\hat{3},\ \hat{y}=\hat{4}$ sau $\hat{x}=\hat{5},\ \hat{y}=\hat{0}$.

Soluție

1.a. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=I_3+B$.

b. det A=$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow A$ este inversabilă şi $A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c. Avem $\det X(a)=(a+1)^3$ şi relația din enunț devine $\det X(a)=(2a-1)^3\Rightarrow(a+1)^3=(2a-1)^3$ $\Leftrightarrow a+1=2a-1\Leftrightarrow a=2.$

2.a. $x*y=xy-x-y+1+1=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1.$

b. $(x*y)*z=(xy-x-y+2)*z=(xy-x-y+2)\cdot z-(xy-x-y+2)-z+2=$
$=xyz-xy-yz-xz+x+y+z=x*(y*z).$

c. $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{\sqrt{4}}{2}*\ldots*\frac{\sqrt{2009}}{2}=1,$ deoarece $a*1*b=1, \forall a,b\in\mathbb{R}.$

Soluție

1.a. $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 2a-1 & 3\\ 1 & a & a-3\end{vmatrix}=(2a-1)(a-3)+3a+2a-2(2a-1)-3a-a(a-3)=a^2-6a+5$.

b. $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 2a-1 & 3\\ 1 & a & a-3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow a^2-6a+5=0 \Leftrightarrow a=1$ sau $a=5$.

c. Pentru $a=0$ sistemul devine $\begin{cases}x+2z=1\\ x-y+3z=1\\ x-3z=1\end{cases}$ și rezolvând sistemul $\begin{cases}x+2z=1\\ x-3z=1\end{cases}$ obținem $z=0$ și soluția $\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}$.

2.a. Legea se mai scrie $x*y=xy-6x-6y+36+6=x(y-6)-6(y-6)+6=$
$=x(y-6)-6(y-6)+6=(x-6)(y-6)+6.$

b. $x*x*x*x=x \Leftrightarrow (x-6)(x-6)(x-6)(x-6)+6=x \Leftrightarrow (x-6)\left[(x-6)^3-1\right]=0 \Rightarrow x=6,\ x=7.$

c. Deoarece $x*6=(x-6)(6-6)+6=6$ și $6*y=6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1*2*3...*6*...*2009=(1*2*...*5)*6*(7*8*...*2009)=x*6*y=6*y=6$.

Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow A \in G$.

b. $\left[\frac{1}{2}(X + I_2)\right]^2 = \frac{1}{4}(X + I_2)(X + I_2) = \frac{1}{4}X^2 + XI_2 + I_2X + I_2^2 = \frac{1}{4}(-I_2 + X + X + I_2) = \frac{1}{2}X$.

c. Din $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ -x & -y \end{pmatrix}$ și $X \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ -t & z \end{pmatrix}$ rezultă că X este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

2.a. $f(1) + f(-1) = 1^2 + a + b + c + 1 - a - b + c + 1$ si înlocuind pe $c = 501$ avem
$f(1) + f(-1) = 2 + 2c = 2 + 2 \cdot 501 = 1004$.

b. Pentru $a = -2, b = 2, c = -1$ avem
$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1) = 0$ Deci rădăcinile polinomului sunt $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ și $x_4 = -1$.

c. Sistemul format de ecuațiile: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c + 1 = 0 \\ -a - b + c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$ imposibil.

Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A \in G$.

b. $A^2 = A,$ din punctul a) $\Rightarrow$ $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A$ $\Rightarrow \det\left(A^3 - 2A^2 + A\right) = \det\left(A - 2A + A\right) = 0.$

c. $(2X - I_2)^2 = (2X - I_2)(2X - I_2) = 4X^2 - 2XI_2 - 2XI_2 + I_2 = 4X^2 - 4X + I_2 = 4X - 4X + I_2 = I_2$.

2.a. $x * y = xy - \sqrt{2009}(x + y) + 2009 + \sqrt{2009} = xy - \sqrt{2009}x - \sqrt{2009}y + 2009 + \sqrt{2009} =$

$= x\left(y - \sqrt{2009}\right) - \sqrt{2009}\left(y - \sqrt{2009}\right) + \sqrt{2009} = \left(x - \sqrt{2009}\right)\left(y - \sqrt{2009}\right) + \sqrt{2009}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b. Se arată că $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Existența elementului e se determină din $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde se obține $e = \sqrt{2009} + 1 \in \mathbb{R}$.

c. Datorită asociativității legii $*$, grupând termenii și ținând cont de cerința **a)**, obținem $\left[\left(-\sqrt{2009}\right) * \left(-\sqrt{2008}\right) * ... * 0 * ... * \left(\sqrt{2008}\right)\right] * \left(\sqrt{2009}\right) = \alpha * \left(\sqrt{2009}\right) = \sqrt{2009}$,

unde am notat cu $\alpha = \left(-\sqrt{2009}\right) * \left(-\sqrt{2008}\right) * ... * 0 * ... * \left(\sqrt{2008}\right) \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

b. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -a + 4$. A inversabilă $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

c. Din pct. **b)**, pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ avem $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ sistem Cramer $\Rightarrow x = 0 = y = z = 0$, soluție unică.

2.a. $x * y = y * x,\ \forall x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p = 1$.

b. $x_1 = 0,\ x_2 = 4$.

c. $3x + 3y + 6 + q = 3x + q + 3y + q - 2 \Rightarrow q = 8$.

Rezolvare

1.a. Din $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

b. $A \cdot X = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ 5g & 5h & 5l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

c. Avem $(B - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.a. $x * e = e * x = x \Leftrightarrow 3xe + 7x + 7e + 14 = x \Leftrightarrow e(3x + 7) = -6x - 14 \Leftrightarrow e = -2$ este element neutru.

b. $x * x \leq -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 14x + 15 \leq 0;\ \Delta = 16,\ x_1 = -\frac{5}{3},\ x_2 = -3,\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3, -2\}$.

c. $(x * y) * z = 9xyz + 21(xy + xz + yz) + 49(x + y + z) + 112 = x * (y * z)$.

Soluție

1.a. $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{vmatrix}=32+4+4-2-16-16=6.$

b. $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&2&4\\a^2&4&16\end{vmatrix}=(2-a)(4-a)(4-2)=2(a-2)(a-4)$. $\det(A)\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$.

c. Deoarece $\det(A)=2(a-2)(a-4)\neq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}\Rightarrow x=y=z=0$.

2.a. Avem $f(1)+f(-1)=2009\Leftrightarrow 2+2c=2009\Leftrightarrow c=\frac{2007}{2}$.

b. Din $\left.\begin{array}{r}f(0)=-2\\ f(1)=a+b-2+1=-2\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=-1$ şi $c=-2$. Cum $x_1=2$ este soluție $\Rightarrow$ $8a+2b=-14$ de unde

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$.

c. Pentru $a=-2,\ b=1$ şi $c=-2$ avem $x^4-2x^3+x-2=(x^2-x+1)(x^2-x-2)$ care are rădăcinile reale, $x_1=-1$ şi $x_2=2$.

Soluție

1. a. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = O_3.$

b. $B^2 = \begin{pmatrix} 2a+1 & 4a & -6a \\ 2a & 4a+1 & -6a \\ 2a & 4a & -6a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B - B^2 = I_3.$

c. Din $2B - B^2 = I_3 \Rightarrow B(2I_3 - B) = I_3 \Rightarrow B^{-1} = 2I_3 - B.$

2.a. $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 + 2 - 3 = 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = (y+1)(3x+3) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$.

b. $(x^2 - 5) \circ 6 = -1 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4) \cdot 7 = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}$.

c. $a \circ b = 3(a+1)(b+1) - 1.$ Dacă $a + 1 = \frac{2}{3},\ b + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \circ b = 2 \in \mathbb{N}$.

Soluție

1.a. $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a^3$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ apoi se verifică ușor că $A^2 X = XA^2$.

c. $aI_3 + bA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ba \\ 0 & ba & 0 \\ ba & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & ba \\ 0 & a+ba & 0 \\ ba & 0 & a \end{pmatrix}$. Notăm cu $B = aI_3 + bA$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & ba \\ 0 & a+ba & 0 \\ ba & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^2 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2+ba^2 & 0 \\ a^2 & 0 & ba^2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & ba \\ 0 & a+ba & 0 \\ ba & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^2 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2+ba^2 & 0 \\ a^2 & 0 & ba^2 \end{pmatrix}$ deci matricea $aI_3 + bA \in G$.

2.a. Avem $f(-1) = 1^{1004} - 1 = 0$.

b. Punând $x = 1$ obținem : $f(1) = 3^{1004} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2009}$ de unde $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2009}$ este un număr par.

c. $r(X) = \dfrac{3^{1004}+1}{2} \cdot X + \dfrac{3^{1004}+1}{2}$.

Soluție

1. a. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2^2 \cdot 5 & 2^2 \cdot 4 \\ 2^2 \cdot 4 & 2^2 \cdot 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^2 = 16(25-16) = 144.$

b. $A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A^2 = A \cdot A = 2^2 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};\ A^3 = A^2 \cdot A = 2^3 \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$

c. $A^2 - 8A + 12I_2 = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$

2. a. $\hat{0}^3 = \hat{0}; \hat{1}^3 = \hat{1};\ \hat{2}^3 = \hat{2};\ \hat{3}^3 = \hat{3};\ \hat{4}^3 = \hat{4};\ \hat{5}^3 = \hat{5} \Rightarrow b^3 = b,\ \forall b \in \mathbb{Z}_6.$

b. $f(\hat{2}) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{5}a = \hat{4} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{2}.$

c. Avem $f = X^3 + 5X = X^3 - X$, deci orice $x \in \mathbb{Z}_6$ este soluție a ecuației.

Soluție

1.a. $\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$. Egalitatea $A_x^2 = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$.

c. Din $A_x^2 = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix}$ şi $2x \cdot A_x = \begin{pmatrix} 2x^2 & 2x \\ 2x & 2x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_x^2 = 2xA_2 + (1 - x^2)I_2$.

2. a) După rezolvarea sistemului obținem $a = \hat{0}$ sau b $= \hat{2}$.

b. Avem $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} = (X + \hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$ de unde rezultă câtul $X^2 + X + \hat{1}$ şi restul $\hat{0}$.

c. $f\left(\hat{1}\right) = a^3 + \hat{2}a + \hat{2}a + \hat{1} = a^3 + a + \hat{1}$, dar $a^3 = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow f\left(\hat{1}\right) = \hat{2}a + \hat{1}$.

Rezolvare

1.a. Din $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

b. $\det(A) \cdot \det(B) = 0$.

c. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -12 & -12 \\ -12 & 24 & -12 \\ -12 & -12 & 24 \end{pmatrix} = 6A.$

$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = -6B.$

2. a. $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2 = xy + 2x + 2y + 4 - 2 = x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2.$

b. $x \circ e = e \circ x = x \Leftrightarrow xe + 2x + 2e + 2 = x \Leftrightarrow e(x+2) = -x - 2 \Leftrightarrow e = -1$; $-3 \circ x' = x' \circ (-3) = -1 \Leftrightarrow x' = -3$.

c. Sistemul se scrie $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 7 \\ (x^2+2)(y^2+2) - 2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x^2+2)(y^2+2) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Soluție

1. a. Determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix} = \left(\sqrt{2009}-1\right)\left(\sqrt{2009}+1\right)+1=2009$.

b. $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2+x_2^2 = \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4^2-2\cdot 2=12,$ unde am ținut cont de relațiile lui Viète.

c. $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3+A^2+A=0_2$.

2. a. $x\circ y=2xy-8x-8y+36=2xy-8x-8y+32+4=2x\left(y-4\right)-8\left(y-4\right)+4=2\left(x-4\right)\left(y-4\right)+4.$

b. Ecuația se mai scrie $2\left(x-4\right)\left(x-4\right)+4=36 \Leftrightarrow \left(x-4\right)^2=16 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=8.$

c. $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2008}=\left(\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{15}\right)\circ\sqrt{16}\circ\left(\sqrt{17}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}\right)=a\circ 4\circ b=4.$

Soluție

1. a) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X^3 = I_3$.

b) $I_3 + X + X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ care are determinantul egal cu 0.

c) $I_3^{-1} = I_3 \in G$, iar X şi X^2 au produsul la stânga şi la dreapta I_3, deci sunt inverse una celeilalte.

2. a) $2+\sqrt{3} = 2+1\cdot\sqrt{3} \in G$.

b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = a-b\sqrt{3} = a+(-b)\sqrt{3}$ şi $a^2-3(-b)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in G$.

c) $xy = (ac+3bd)+(ad-bc)\sqrt{3}$ şi

$(ac+3bd)^2 - 3(ad-bc)^2 = c^2\left(a^2-3b^2\right) - 3d^2\left(a^2-3b^2\right) = c^2-3d^2 = 1 \Rightarrow xy \in G$.

Soluție

1. a. $A \cdot B = O_3$.

b. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2$ deoarece $AB = BA = O_3$.

$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 + B^2$ deoarece $AB = BA = O_3$ deci $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$.

c. $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ inversa ei este $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

2. a. $x * y = 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = (y+1)(3x+3) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$.

b. $(x^2 - 2) * 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$.

c. Din $\begin{cases} x * (-1) = -1 \\ (-1) * y = -1 \end{cases}$ avem $\alpha * (-1) * \beta = -1 \Rightarrow (-2009) * (-2008) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 2008 * 2009 = -1.$

Soluție

1. a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y+12 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ şi $B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2x+2y \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow x = 6$ şi $y \in \mathbb{R}$.

b. Calculând $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ şi $4(A - I_2) = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = 4(A - I_2)$.

c. $A = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = 2^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Din relația $A^3 - aA^2 + 4A = O_2 \Rightarrow a = 4$.

2. a. $x * y = xy - 3(x+y) + 12 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = x(y-3) - 3(y-3) + 3 = (x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b.Ecuația $x \circ (x+1) + x * (x+1) = 11 \Leftrightarrow 2x + 4 + x^2 - 5x + 6 + 3 = 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.

c. $\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ (x-2)(y-3) = (x-3)(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1.$

Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 64 \\ 16 & 32 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8A.$

b. Avem $\det X(a) = \begin{vmatrix} 4a+1 & 8a \\ 2a & 4a+1 \end{vmatrix} = (4a+1)^2 - 16a^2 = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 = 8a+1$.

c. $X(a) \cdot X(b) = \begin{pmatrix} (4a+1)(4b+1) + 8a \cdot 2a & 32ab + 8b + 32ab + 8a \\ 2a(4b+1) + 2b(4a+1) & 2a \cdot 8b + (4a+1)(4b+1) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4(8ab+a+b)+1 & 8(8ab+a+b) \\ 2(8ab+a+b) & 4(8ab+a+b)+1 \end{pmatrix} = X(a+b+8ab).$

2.a. Din $f(1) = 3^{670} - 1$ și $f(-1) = (-1)^{670} - 1 = 0 \Rightarrow f(1) + f(-1) = 3^{670} - 1$.

b. $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2009} = 3^{670} - 1 =$ număr par.

c. $r(X) = \dfrac{3^{670}-1}{2} \cdot X + \dfrac{3^{670}-1}{2}.$

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b. $f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=-2$. Tabel de variație

$\Rightarrow f$ crescătoare pe $(-\infty,-2],[0,+\infty)$ şi f descrescătoare pe $[-2,-1),(-1,0]$.

c. $f(-2)=-4$. Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\le -4,\ \forall x<-1$.

2.a. Limita la stânga, respectiv la dreapta a funcției f în $x_0=0$ este egală cu 1; $f(0)=1$, deci f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b. $\int_{-1}^{0}\left(x^3+xe^x\right)dx=\dfrac{2}{e}-\dfrac{5}{4}$.

c. $V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2=\dfrac{17\pi}{6}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=e^x+e^{-x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$

b. $f'(x)=e^x+e^{-x} \Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c. Avem funcția $g(x)=2e^{-x}$. Atunci $S=2(1+e^{-1}+e^{-2}+...+e^{-2009})=2\dfrac{e^{-2010}-1}{e^{-1}-1}=2\dfrac{e^{2010}-1}{e^{2009}(e-1)}$.

2.a. F derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow F$ este primitivă pentru f.

b. $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=(x-1)e^x\Big|_0^1=1$.

c. $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-[f'(t)]^2}{f^2(t)}dt=\int_1^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\left(\frac{f'}{f}\right)(t)\Big|_1^x=\frac{t+1}{t}\Big|_1^x=\frac{x+1}{x}-2$,unde $f'(x)=(x+1)e^x$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

b. $f'(x)=0\Rightarrow x=e^2$. Din tabelul de variație rezultă că f este crescătoare pe $\left(0,e^2\right]$ şi f descrescătoare pe $\left[e^2,+\infty\right)$.

c. Din tabelul de variație rezultă că f este crescătoare pe intervalul $\left(0,e^2\right]$

$\Rightarrow f(3)\le f(5)\Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}\le\dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow \sqrt{5}\ln 3\le\sqrt{3}\ln 5\Rightarrow 3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

2.a. $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=f(-1)=1\Rightarrow f$ continuă în $x=-1$. În plus, f continuă pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,+\infty)$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$. Deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b. $V=\pi\displaystyle\int_0^2 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^2(2+x)^2\,dx=\pi\left.\frac{(2+x)^3}{3}\right|_0^2=\frac{56\pi}{3}$.

c. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x\cdot f(x)}{e}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{xe^x\cdot e}{e}dx+\int_{-1}^{0}\frac{(2x+x^2)}{e}dx=(x-1)e^x\Big|_{-2}^{-1}+\frac{1}{e}\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{9-8e}{3e^2}$.

Soluții

1.a. Avem $f'(x)=1-e^{-x}$.

b. $f'(x)=1-e^{-x}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație obținem *f* descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi *f* crescătoare pe $[0,\infty)$.

c. Din $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0 \Rightarrow y=x$ ecuația asimptotei oblice la $+\infty$.

2.a. $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 (x^3+3x)dx=\frac{7}{4}$.

b. $\int_1^a \left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=3\int_1^a xe^x dx=3e^a(a-1)=6e^a \Rightarrow a=3$.

c. $\int_0^1 \left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx=\int_0^1 g^{2009}(x)\cdot g'(x)dx=\frac{4^{2010}}{2010}$.

Soluții

1.a. Avem $f'(x) = 2009x^{2008} - 2009$. Obținem $f(0) = 2008$, $f'(0) = -2009 \Rightarrow f(0) + f'(0) = -1$.

b. Ecuația tangentei: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ și $f(1) = 0,\ f'(1) = 0$ obținem ecuația $y = 0$.

c. $f''(x) = 2009 \cdot 2008x^{2007} \Rightarrow f''(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;\infty)$. Deci f este convexă pe $[0;\infty)$.

2.a. $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow$ Aria $(\Gamma_f) = \int_0^1 (x + e^{-x})dx = \frac{3e-2}{2e}$.

b. Din $e^{-x^2} \geq 1 - x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$, integrăm relația pe $[0,1] \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$, deci $\int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \frac{2}{3}$.

c. $g(x) = e^{-x} + e^x$ obținem $V(C_g) = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 (e^{-2x} + e^{2x} + 2)dt = \frac{\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)\pi}{2}$.

Soluții

1.a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}\right)=2$.

b. Din $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ și $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Avem $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

c. Din $f(0)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ și f crescătoare pe $[0,\infty)$ obținem $\frac{1}{2} \le f(x) \le 2,\ \forall x\in[0,\infty)$.

2.a. Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. F este crescătoare pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow F'(x)=f(x)\ge 0$, adevărat pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

b. $\int_0^1 x\cdot f(x)dx = \int_0^1\left(x^3+x+xe^x\right)dx = \frac{7}{4}$.

c. $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \left(F(\ln x)\right)' dx = F(1)-F(0) = e+\frac{1}{3}$.

Rezolvare

1.a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$. Avem $f'(x) = e^x + 2x$. Deci limita este egală cu $e + 2$.

b. Din $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală către $+\infty$

Din $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + x^2}{x} = +\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă oblică către $+\infty$

c. $f''(x) = e^x + 2 \Rightarrow f''(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$.

2.a. $\int_1^e f'(x)dx = f(x)\Big|_1^e = f(e) - f(1) = \frac{1 - 2e}{2e}$.

b. F este primitivă pentru $f \Rightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) > 0,\ \forall x \geq 1 \Rightarrow F$ crescătoare pe $[1, +\infty)$.

c. $f(x) > 0,\ \forall x \in [1; e^2) \Rightarrow$ aria $(\Gamma_f) = \int_a^{e^2} f(x)dx = \ln(1 + \ln x)\Big|_a^{e^2} = \ln 3 - \ln(1 + \ln a) = \ln \frac{3}{1 + \ln a}$.

Dar, aria $(\Gamma_f) = \ln \frac{3}{2}$, deci obținem $a = e \in (1; e^2)$.

Rezolvare

1.a. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1+\ln 1}{1-\ln 1}=1$.

b. $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1 \Rightarrow y=-1$ ecuația asimptotei orizontale.

2.a. $\int (f+g)(x)dx=e^x+\ln x+\mathcal{C}$.

b. $\int\limits_1^2 (f^2(x)+g^2(x))dx=\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{e^4-e^2+1}{2}$.

c. Din $f(x)g(x)\le\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\Rightarrow\int\limits_1^2 f(x)g(x)dx\le\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx$. Deci $\int\limits_1^2 e^x\dfrac{1}{x}dx\le\dfrac{e^4-e^2+1}{4}$.

Rezolvare

1.a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x x^2 = +\infty$

b. Din $f'(x) = e^x\left[ax^2 + (2a+b)x + b + c\right]$, $f(0) = c$, $f'(0) = b + c \Rightarrow f'(0) - f(0) = b$

c.

$f''(x) = e^x\left[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c\right] \Rightarrow 2a + 2b + c = 4$; $f(0) = 0$, $c = 0$, $f'(0) = 1$, $b + c = 1$

$\Rightarrow a = 1,\ b = 1,\ c = 0$.

2.a. $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx = \int_0^1 1dx = x\Big|_0^1 = 1$.

b. Din $x^2 \le x,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1} \le \frac{x+1}{x+1},\ \forall x \in [0,1]$ și integrând pe $[0,1]$ obținem relația cerută.

c. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)+2}{x+1}dx = \int_0^1 x^n dx + \int_0^1 \frac{2}{x+1}dx = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$.

Rezolvare

1.a. Din $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 1$.

b. $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>1 \\ -2x+1, & x<1 \end{cases}$, $f'(0) = 1,\ f'(2) = 3 \Rightarrow f'(0) + f'(2) = 4$.

c. Pentru $x \in (-\infty;1)$ avem $f'(x) = -2x+1$ și $f''(x) < 0$, deci *f* este concavă pe $(-\infty;1)$.

2.a. $g'(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ este primitivă a funcției *f*.

b. $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)\cdot g'(x)dx = \dfrac{g^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)^2$.

c. $\int_0^1 f'(x)\cdot g'(x)dx = \int_0^1 g(x)\cdot f(x)dx$ pentru că $f'(x) = g(x)$ și $g'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $\forall x > 0$.

b. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{(x+1)^3} < 0,\ \forall x > 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(-\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{(x+1)^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-2 - \dfrac{2x^3}{(x+1)^3}\right) = -4$.

2.a. $\displaystyle\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_e^e x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_1^e = \frac{e^2-1}{2}$.

b. $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + x\right)dx = \left(\frac{\ln^2 x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^e = \frac{e^2}{2}$.

c. $I_n = \left(\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)\bigg|_{e^n}^{e^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}$, obținem $I_{n+1} - I_n = 1 \Rightarrow$ progresie aritmetică cu rația 1.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$.

b. $f''(x)=\dfrac{2}{x^2}\geq 0,\ \forall x>0 \Rightarrow f$ convexă pe $(0;+\infty)$.

c. Din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow x=2$ punct de minim și $f(x)\geq f(2),\ \forall x>0 \Rightarrow f(x)\geq \ln\dfrac{e^2}{4}$.

2.a. $\int f_1(x)dx=\int (x^2+x+1)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)+\mathcal{C}$.

b. $\int_0^1 e^x f_0(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx=xe^x\Big|_0^1=e$.

c. $\int_0^1 f_m(x)dx=\int_0^1\left(m^2x^2+\left(m^2-m+1\right)x+1\right)dx=\dfrac{5m^2-3m+9}{6}$, deci $\dfrac{5m^2-3m+9}{6}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m\in\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$, pentru că $m\in\mathbb{R}^*$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}(x+1)}=0 \Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $-\infty$.

c. Din $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$, punct de minim şi din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq f(0)$
$\Rightarrow 1\leq f(x),\ \forall x>-1$.

2.a. $I_0=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_e^{e^2}=1$

b. $I_1=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}$.

c. $1\leq \ln^n x\leq 2^n \Rightarrow \displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx\leq\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx\leq\int_e^{e^2}\frac{2^n}{x}dx$. Dar $I_n=\dfrac{\ln^{n+1}x}{n+1}\Big|_e^{e^2}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ şi $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=1$ $\Rightarrow$ relația cerută.

Rezolvare

1. a. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(e)=0.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

c. $f'(x)=0\Rightarrow x=e$ punct de maxim și din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow f(x)\le f(e),\ \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$

$\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{\ln e}{e}\Rightarrow e\ln x\le x\ln e\Rightarrow x^e\le e^x,\ \forall x>0$.

2.a. $\int\limits_0^4 f^2(x)dx=\left(16x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\dfrac{128}{3}$.

b. $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx=-\sqrt{16-x^2}\Bigg|_{-\sqrt5}^{\sqrt5}=0$.

c. Avem $0\le\sqrt{16-x^2}\le 4$. Integrăm pe $[0,m]$ și obținem

$0\le\int\limits_0^m f(x)dx\le 4x\Big|_0^m\Rightarrow 0\le\int\limits_0^m f(x)dx\le 4m\le 8$, pentru $m\in[0;2]$.

Rezolvare

1. a. Din $f_1(x)=f_0'(x)\Rightarrow f_1(x)=-e^{-x}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}-1\right)=-1\Rightarrow y=-1$ ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$.

c. $f_2(x)=f_1'(x)=e^{-x}$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}+1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$.

2.a. $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$.

b. $g(x)=x\sqrt{x^2+1}\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_g\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

c. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx=\int_{-1}^1 e^x\left(x^2+1\right)dx=e^x\left(x^2-2x+3\right)\Big|_{-1}^{1}=2e-\frac{6}{e}$.

Rezolvare

1.a. Din f continuă în $x = 0$ $\Rightarrow$ $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(e^x - 1\right) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^2 + x + a\right) = a$, $f(0) = a$ obținem $a = 0$.

b. Din $f'(x) = e^x$, $f'(-1) = e^{-1} \Rightarrow y - \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e}(x+1) \Rightarrow x - ye + 2 - e = 0$

c. Pentru $x > 0$ avem $f'(x) = 2x + 1$ și $f''(x) = 2 > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $(0;+\infty)$.

2.a. $I_0 = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b. $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 1 \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$.

c. $I_{n+2} - I_n == \int_2^3 \frac{x^n (x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x^2-2x)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

b. $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x)}{x^4}$ deci f descrescătoare pe $(0,2]$.

c. Din f descrescătoare pe $(0,2]\Rightarrow f(\sqrt{2})\geq f(\sqrt{3})\Rightarrow \dfrac{e^{\sqrt{2}}}{2}\geq\dfrac{e^{\sqrt{3}}}{3}$.

2.a. $\int_1^2\left(x-f(x)+\ln x\right)^2 dx=\int_1^2(2x)^2 dx=\left.\dfrac{4x^3}{3}\right|_1^2=\dfrac{28}{3}$.

b. F primitivă pentru $f\Rightarrow F''(x)=f'(x)$; $F''(x)=\dfrac{1-x}{x}\Rightarrow F''(x)\leq 0,\ \forall x>1\Rightarrow$ F concavă pe $(1,+\infty)$.

c. $h(x)=\ln x\geq 0,\ \forall x\in[1;e]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_h)=\int_1^e h(x)dx=\int_1^e \ln x dx=x(\ln x-1)\Big|_1^e=1$.

Rezolvare

1.a. $f'(x) = 2(x+1) + 2(x-1) = 4x$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+2}{x^2} = 2$.

c. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $g'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$. Din tabelul de variație al funcției g se obține că g este crescătoare pe $[-1;1]$ și descrescătoare pe $(-\infty;-1]$ și pe $[1;+\infty)$.

2.a. $g(x) = e^x \Rightarrow \int g(x)\,dx = g(x) + \mathcal{C}$.

b. $\int\limits_1^e f(x)\,dx = \left(e^x + x(\ln x - 1)\right)\Big|_1^e = e^e - e + 1$.

c. $\int\limits_1^e x \cdot f\left(x^2\right)dx = \dfrac{1}{2}F\left(x^2\right)\Big|_1^e = \dfrac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$. $F(x) = e^x + x(\ln x - 1)$, $\forall x > 0$ este o primitivă a funcției f.

Rezolvare

1. a. $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$.

c. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$ punct de maxim şi f descrescătoare pe $\left[\sqrt{e}, \infty\right)$. Din $f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2e} \Rightarrow$ relația cerută.

2.a. $\int_1^e x\left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = 1.$

b. F primitiva funcției f $\Rightarrow F'(x) = f(x)$ şi $F'(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0,\ \forall > 0 \Rightarrow F$ funcție crescătoare pe $(0, +\infty)$.

c. $\int_1^2 f(x) f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^2 = -\frac{22}{81}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

b. $f'(x) > 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow f$ funcție crescătoare.

c. f crescătoare pe $[0,1]$. Cum $f(0) = \dfrac{1}{2}$ și $f(1) = \dfrac{e}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{e}{3} \Rightarrow$ concluzia.

2.a. $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^x = -e^{-x} + 1 = -f(x) + 1$

b. $h''(x) = (F - f)''(x) = f'(x) - f''(x)$ și $f''(x) = e^{-x}$, $(F - f)''(x) = -2e^{-x}$ negativă $\Rightarrow h$ concavă pe $\mathbb{R}$.

c. $\int_0^1 x \cdot f(x^2)\,dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^1 = \dfrac{e-1}{2e}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

b. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2-x^2+x}{x-1}=2\Rightarrow$ $y=x+2$ ecuația asimptotei .

c. Din tabelul de variație se obține $f(x)\le -1,\ \forall x<1$ și $f(x)\ge 7,\ \forall x>1$. Deci $f(2009)-f\left(\dfrac{1}{2009}\right)\ge 8$.

2.a. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{16}{3\ln 3}$.

b. $V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1 3^{-2x}dx=\pi\dfrac{3^{-2x}}{-2\ln 3}\Bigg|_0^1=\dfrac{4\pi}{9\ln 3}$.

c. $F''(x)=3^x\ln 3-3^{-x}\ln 3=(3^x-3^{-x})\ln 3$. $F''(x)\ge 0,\ \forall x\ge 0$ și $F''(x)\le 0,\ \forall x\le 0$. Deci, F concavă pe $(-\infty,0]$ și F convexă pe $[0,\infty)$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$.

b. Din $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-e\ln x}{\dfrac{x-e}{x}}=\lim\limits_{x\to e}x\left(\dfrac{x-e\ln x}{x-e}\right)=0$.

c. Din $f'(x)=0\Rightarrow x=e$ şi din tabelul de variație, obținem f descrescătoare pe $(0,e]$ şi f crescătoare pe $[e,\infty)$.

2.a. $\int\limits_2^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x-1}\right)dx=\int\limits_2^e\left(\dfrac{1}{x}\right)dx==\ln x\Big|_2^e=1-\ln 2$

b. $F''(x)=f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0,\ x\ge 2\Rightarrow F$ concavă pe $[2;+\infty)$.

c. $f(x)>0,\ \forall x\in[2;+\infty)\Rightarrow$ aria $\Gamma_f=\int\limits_2^a f(x)dx=\ln\dfrac{a(a-1)}{2}\Rightarrow\ln\dfrac{a(a-1)}{2}=\ln 3\Rightarrow\ a=3$.

Rezolvare

1.a. $f'(x)=(x^2-1)e^x$.

b. $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$, punct de minim şi $x=-1$, punct de maxim.

.**c.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{2}{x-1}=2$.

2.a. $F'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-1=f(x)$. Deci, F primitiva lui f . $F(0)=0$.

b. $\int_1^2 f(e^x)dx=\int_1^2\left(x+e^{-x}\right)dx=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}$.

c. $\int_1^2 f(x)\cdot F(x)dx=\int_1^2 F'(x)\cdot F(x)dx=\dfrac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x}$.

b. Din $f'(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x} \Rightarrow f'(x) = 0$ şi $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x = 1$ şi f descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,\infty)$ obținem $x = 1$ este punct de extrem.

c. Din $f(x) \geq f(1),\ \forall x > 0 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(1) \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x} \geq \dfrac{1}{4}$.

2.a. $I_0 = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e.$

b. $I_1 = \int_1^2 xe^x dx = e^x (x-1) \Big|_1^2 = e^2.$

c. $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big|_1^2 - (n+1) \int_1^2 x^n e^x dx = 2^{n+1} e^2 - e - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = e\left(2^{n+1} e - 1\right)$.

Rezolvare

1.a. $f'(x) = e^x - 1.$

b. $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ punct de minim şi din tabelul de variație $\Rightarrow f(x) \geq f(0)$, $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx \right) = 0.$
Deci $y = -x$ este ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției.

2.a. $\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$

b. $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n \Rightarrow 3 + 2m + n = 0$ şi $3 - 2m + n = 0 \Rightarrow m = 0,$ n$= -3$. Din $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4 \Rightarrow p = 2$.

c. $\int_0^x f(t)dt = \frac{x^4}{4} + m\frac{x^3}{3} + n\frac{x^2}{2} + px \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=e^x-1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe $(-\infty;0]$ și crescătoare pe $[0;+\infty)$.

c) Din tabelul de variație obținem că $O(0,0)$ este punct de minim al funcției $f\Rightarrow f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{x^2}\geq x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{x^2}+e^x\geq x^2+x+2$.

2.a) Funcția g este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $g'(x)=(x\cdot\ln x)'=1+\ln x=f(x),\ \forall x>0$. Funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Avem $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx\overset{\text{cf.a)}}{=}\int_1^e g'(x)\cdot g(x)dx=\left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^e=\frac{e^2}{2}$.

c) $g(x)\geq 0, \forall x\in[1;e]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_g)=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

.

Soluție

1. a) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b). $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație f este descrescătoare pe $[e;+\infty)$ și crescătoare pe $(0;e]$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$. Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la G_f spre $+\infty$.

2. a) $\int f(x)dx=\int\left(x^{1004}+2009^x\right)dx=\frac{x^{1005}}{1005}+\frac{2009^x}{\ln 2009}+\mathcal{C}$.

b) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ derivata ei, adică funcția f, este pozitivă pe $\mathbb{R}$.

Cum $f(x)=x^{1004}+2009^x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (suma a două funcții pozitive), rezultă că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Înlocuind în definiția funcției f pe x cu x^2, integrala de calculat devine succesiv:

$$\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^{2009}\,dx+\int_0^1 x\cdot 2009^{x^2}\,dx\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}}\left.\frac{x^{2010}}{2010}\right|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)\cdot 2009^{u(x)}\,dx=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2009^{x^2}}{\ln 2009}\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2008}{\ln 2009}.$$

Soluție

1. a) Avem: $\left.\begin{array}{l} f_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{e}\cdot e^x-1\right)=0 \\ f_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\ln x)=0 \\ f(1)=\frac{1}{e}\cdot e^1-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x_0=1$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\cdot e^x-1\right)=-1\in\mathbb{R}$ rezultă că dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Avem: $f'(x)=\frac{1}{x},\quad \forall x>1$ și $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\quad \forall x\in(1,+\infty)$. Deci f este concavă pe $(1,+\infty)$.

2. a) $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+2x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right|_0^1=\frac{7}{3}.$

b) $f(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2+1}{=}}\int_0^1 1\,dx+\int_0^1\frac{u(x)}{u'(x)}dx=\left.x\right|_0^1+\ln\left.\left|u(x)\right|\right|_0^1=\ln(2e).$

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=\left.e^{f(x)}\right|_0^1=e(e-1).$

Soluție

1.a) Avem $f(1)=1-\ln 1=1$. $f'(x)=1-\frac{1}{x}, \forall x>0 \Rightarrow f'(1)=1-\frac{1}{1}=0$. Prin urmare $f(1)-f'(1)=1-0=1$.

b) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe $(0;1]$ şi crescătoare pe $[1;\infty)$. Aşadar $x=1$ este punct de minim al funcției f.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2.a) $I+J=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx+\int_0^1\frac{xe^x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{(x+1)e^x}{x+1}dx=e-1$.

b) Din ipoteză $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R} \underset{\text{pentru } x\in[0,1]}{\overset{x+1>0}{\Rightarrow}} \frac{xe^x}{x+1}\geq\frac{x(x+1)}{x+1}=x$. Integrând inegalitatea pe intervalul $[0,1]$ obținem $J\geq\int_0^1 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

c) Avem $I=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\cdot\frac{1}{x+1}dx \underset{\text{prin părți}}{\overset{\text{metoda integrării}}{=}} \left.\frac{e^x}{x+1}\right|_0^1+\int_0^1 e^x\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{e-2}{2}+\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

Soluție

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. $f'(x)=\left(x^2+e^x\right)'=2x+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$. Limita cerută este egală cu $2\cdot 0+e^0=1$.

b) $f'(x)=2x+e^x \Rightarrow f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(2x+e^x\right)'=2+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$. Cum $e^x>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) $2x+e^x-\left(2+e^x\right)+x^2+e^x=e^x-3 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-1$.

2. a) $I_1=\int_0^1 x(1+x)^1\,dx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$.

b) Conform ipotezei $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}, \ \forall x\in[0,1]$ și $\forall n\in\mathbb{N}$. Prin înmulțirea acestei inegalități cu $x>0$ obținem $x(1+x)^n\le x(1+x)^{n+1}$ (cazul $x=0$ verifică și el inegalitatea). Integrând această inegalitate pe $[0,1]$ obținem $I_n\le I_{n+1}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, de unde $I_{2009}\ge I_{2008}$.

c) Utilizând identitatea dată obținem $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx=\int_0^1\left((1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right)dx=$

$$\overset{u(x)=1+x}{\underset{u'(x)=1}{=}}\int_0^1 u'(x)\cdot u^{n+1}(x)\,dx-\int_0^1 u'(x)\cdot u^n(x)\,dx=\left.\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}\right|_0^1-\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

Soluție

1.a) $f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x\left(2\ln x+1\right),\ \forall x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}\overset{\text{cf. pct.a)}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2\ln x+1\right)}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)=2$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x\left(2\ln x+1\right)=0\Rightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că $A\left(e^{-\frac{1}{2}},-\dfrac{1}{2e}\right)$ este punctul de minim al funcției f. Deci $f(x)\ge-\dfrac{1}{2e}$, oricare ar fi $x>0$.

2. a) Avem $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^1 xe^x\cdot e^{-x}\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

b) $f'(x)=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. $\int_0^1 f''(x)\,dx=\int_0^1\left(f'(x)\right)'dx=\left.f'(x)\right|_0^1=f'(1)-f'(0)=2e-1$.

c) Avem $\int_1^2\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}\,dx=\int_1^2 xe^{x^2}\,dx\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}}\dfrac{1}{2}\int_1^2 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\dfrac{1}{2}\left.e^{u(x)}\right|_1^2=\dfrac{e\left(e^3-1\right)}{2}$.

Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x-\frac{1}{e^x}\right)'=1+\frac{1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=1+\frac{1}{e^0}=2$. $f(0)=0-\frac{1}{e^0}=-1$. Deci $f(0)+f'(0)=-1+2=1$.

b) Limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

c) $f'(x)=1+\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)=\left(1+\frac{1}{e^x}\right)'=-\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$. Din faptul că $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, adică f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int f(x)\,dx=\int(1-x)\,dx=x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx=\pi\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}$.

c) $(x+1)g(x)=1-x^{2010},\ \forall x\in[0,1]$, $\int\limits_0^1(x+1)g(x)\,dx=\int\limits_0^1\left(1-x^{2010}\right)dx=\left(x-\frac{x^{2011}}{2011}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{2011}<1$.

Soluție

1.a) $f'(x) = -\dfrac{2e^x\left(x+e^x\right)-2e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2} = \dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}\right) = -1 \Rightarrow$ dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală la G_f spre $+\infty$.

c) $f'(x) = \dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0,+\infty)$. Din tabelul de variație al funcției f deducem că este punctul de maxim. Cum $f(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$ și $f(0) = -1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{cf.b)}{=} -1$, obținem

$-1 \le f(x) \le \dfrac{1-e}{1+e},\ \forall x \ge 0$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx \underset{u'(x)=1}{\overset{u(x)=x+1}{=}} \int_0^1 \left(1-\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)dx = \left(x-\ln\left|u(x)\right|\right)\Big|_0^1 = 1-\ln 2$.

b) $I_{n+1}+I_n = \int_0^1 \left(\dfrac{x^{n+1}}{x+1}+\dfrac{x^n}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \dfrac{x^n(x+1)}{x+1}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.

c) $\int_0^1 \dfrac{x^n}{2}\,dx \le \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+1}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx \Rightarrow \dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Bigg|_0^1 \le I_n \le \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 \Rightarrow \dfrac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{n+1} \overset{n=2009}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\cdot 2010} \le I_{2009} \le \dfrac{1}{2010} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le 2010\cdot I_{2009} \le 1.$

Soluție

1. a) $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 5.$

c) f' este crescătoare pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)' = f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .Cum $f''(x) = \left((x^2 + 4x + 5)e^x\right)' =$

$= (x+3)^2 e^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$ rezultă concluzia.

2. a) Relația de demonstrat este echivalentă cu a arăta că $f'(x) = g(x),\ \forall x > 0$. Avem

$f'(x) = \left(x^2 + x\ln x\right)' = 2x + \ln x + 1 = g(x),\ \forall x \in (0, +\infty)$

b) Avem $\int_1^e f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)\, dx = \left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^e = \dfrac{\left(e^2 + e\right)^2 - 1}{2}$.

c) Pentru $x \in [1, e]$ rezultă că $\ln x \geq 0$. Deci $f(x) > 0, \forall x \in [1, e]$.

Așadar Aria$\left(\Gamma_f\right) = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x\, dx = \dfrac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}$.

.

Soluție

1.a) $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}-3x\right)'=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{2}$.

b) $f'(x)=0\Rightarrow x=4$. Din tabelul de variație al funcției $f\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0;4]$ şi crescătoare pe $[4;\infty)$.

c) Din punctul **b)** şi din $l_d(0)=0$, $f(1)=-2\Rightarrow -2\le f(x)\le 0,\ \forall x\in(0;1]$.

$x,x^2\in(0;1]\Rightarrow f(x),\ f\left(x^2\right)\in[-2;0)\Rightarrow -4\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 0$.

2. a) $F'(x)=\left(e^x+x^3+2x-1\right)'=e^x+3x^2+2=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f.

b) Avem $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx=\int_0^1 F'(x)\cdot F(x)\,dx=\left.\dfrac{F^2(x)}{2}\right|_0^1=\dfrac{(e+2)^2}{2}$.

c) Ținând cont că F este primitivă a lui f obținem $xf(x)+F(x)=xF'(x)+F(x)=\left(x\cdot F(x)\right)'$.

Deci $\int_0^1\left(xf(x)+F(x)\right)dx=\int_0^1\left(xF(x)\right)'dx=xF(x)\Big|_0^1=F(1)$.

Soluție

1. a) Avem $f'(x)=\left(\left(x^2-3x-3\right)e^x\right)'=\left(x^2-3x-3\right)'e^x+\left(x^2-3x-3\right)\left(e^x\right)'=$

$=(2x-3)e^x+\left(x^2-3x-3\right)e^x=\left(x^2-x-6\right)e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x-3\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x-3}{e^{-x}}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{-e^{-x}}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$.

Deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Cerința este echivalentă cu a arăta că panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=-2$ este 0, adică $f'(-2)=0$. Avem $f'(x)\overset{cf.a)}{=}\left(x^2-x-6\right)e^x$. Prin urmare $f'(-2)=0$.

2. a) f este continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,+\infty)$ (operații cu funcții continue).

Studiem continuitatea funcției f în $x_0=0$:

$f_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+2)=2;\ f_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(e^x+1\right)=2;\ f(0)=e^0+1=2\Rightarrow f$ este continuă şi în $x_0=0$.

Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+2)\,dx+\int_{0}^{1}\left(e^x+1\right)dx=e+\frac{3}{2}$.

c) $x^2\ge 0\Rightarrow f\left(x^2\right)=e^{x^2}+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Deci $\displaystyle\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^{x^2}+1\right)dx=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx+\int_0^1 x\,dx=$

$\displaystyle\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}}\ \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx+\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\left.\frac{1}{2}\cdot e^{u(x)}\right|_0^1+\frac{1}{2}=\left.\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\right|_0^1+\frac{1}{2}=\frac{e}{2}$.

Soluție

1.a) Avem $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1-\ln 1}{1+\ln 1} = 1$.

b) $f'(x) = \left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right)' = \frac{2(\ln x - 1)}{(x+\ln x)^2}$, $\forall x \geq 1$.

c) $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{\ln x - 1}{2x^2}$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. a) Au loc succesiv egalitățile $\int\limits_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

b) $\int g(x)dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx \overset{\substack{u(x)=x^2+1}}{\underset{u'(x)=2x}{=}} \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + \mathcal{C} = \ln\left|\underbrace{x^2+1}_{>0}\right| + \mathcal{C} = \ln\left(x^2+1\right) + \mathcal{C} = f(x) + \mathcal{C}$.

c) $\int\limits_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}dx = \int\limits_1^2 f'(x)\cdot f^{-2}(x)dx = -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$

b) Cum $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in[0;\infty)$ şi descrescătoare pe $(-\infty;0]$.

c) Din ipoteză $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=0, \forall x\in\mathbb{R}^*$. Deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{de\,2009\,ori}+x^{2010}}{x^{2009}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

2.a) $I_0=\int_e^{e^2}x\,dx=\frac{e^4-e^2}{2}$.

b) $x\in\left[e,e^2\right]\Rightarrow 1\le\ln x\le 2\Rightarrow x\cdot\ln^n x\le x\cdot\ln^{n+1}x, \ \forall x\in\left[e,e^2\right]$ şi $\forall n\in\mathbb{N}$. Integrând obținem $I_n\le I_{n+1}$.

c) $I_n=\int_e^{e^2}x\cdot\ln^n x\,dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln^n x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^n x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\left(\ln^n x\right)'dx=\frac{e^4\cdot 2^n}{2}-\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_e^{e^2}x\cdot\ln^{n-1}x\,dx=$

$=\frac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție

1.a) $f'(x)=(\ln x-x+1)'=\frac{1}{x}-1, \forall x>0$.

b) $f'(x)=\frac{1}{x}-1=0\Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in(0;1]$ și descrescătoare pe $[1;\infty)$. Așadar $x=1$ este punctul de maxim al funcției f.

c) Din tabelul de variație și din $f(e)=2-e\Rightarrow 2-e\le f(2)\le 0$.

2.a) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}$.

b) Cum $x\in[-a,a]$ și $a\in(0,1)$ rezultă că $x<1\Rightarrow f(x)=-x+1$. Deci $\int_{-a}^{a} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-a}^{a}(-x+1)dx=1$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-a}^{a}=1\Leftrightarrow\left(-\frac{a^2}{2}+a\right)-\left(-\frac{(-a)^2}{2}+(-a)\right)=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\in(0,1)$.

c) $\forall x\in[0,1]$ avem $e^x\ge 1$. Deci $f\left(e^x\right)=e^x-1\Rightarrow\int_0^1 x\cdot f\left(e^x\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x-1\right)dx=\int_0^1 x\cdot e^x\,dx-\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x)=2x+\frac{2}{x^3}, \forall x>0$.

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ este $d: y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.
Pentru $x_0=1$, $f\left(x_0\right)=0$ şi $f'(1)=4$. Deci ecuația tangentei la G_f în punctul $A(1,0)\in G_f$ este $d: y=4(x-1)\Rightarrow d: 4x-y-4=0$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(x+\frac{1}{x^3}\right)}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=2.$

2.a) $F'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=f(x), \quad \forall x>0 \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f.

b) $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx \overset{\text{F primitivă} \Rightarrow}{\underset{F'(x)=f(x)}{=}} \int_1^2 F(x)\cdot F'(x)\,dx=\left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_1^2=\frac{(2-\ln 2)^2-1}{2}$.

c) Pentru orice $x\in[1,e]$ rezultă că $\ln x\le 1\le x$. Deci $F(x)=x-\ln x\ge 0, \forall x\in[1,e]$.
Aria cerută va fi egală cu $\text{Aria}\left(\Gamma_F\right)=\int_1^e F(x)\,dx=\int_1^e (x-\ln x)\,dx=\frac{e^2-3}{2}$.

.

Soluție

1. a) $f'(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)'=-\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \forall x>1.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-\dfrac{1}{(2-1)^2}=-1.$

c) Din $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x>1,$ rezultă că funcția f este descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

2. a) $\int\limits_1^4 f(x)dx=\int\limits_1^4\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}dx=\int\limits_1^4\dfrac{1}{x}dx+\int\limits_1^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2+\ln 4$.

b) $\int\limits_1^4 g(x)\,dx=\dfrac{1}{4}\int\limits_1^4 x'\cdot\ln x\,dx=\ln 4-\dfrac{3}{4}$.

c) $\dfrac{1}{2}\int\limits_1^e\dfrac{1+x}{x^2}\ln x dx=\dfrac{1}{4}\ln^2 x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2x}\ln x\Big|_1^e+\int\limits_1^e\dfrac{1}{2x^2}dx=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{e}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x^{2010}+2010^x\right)'=2010\cdot x^{2009}+2010^x\ln 2010,\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=2010\cdot 2009\cdot x^{2008}+2010^x\ln^2 2010$ și cum $x^{2008}\geq 0;\ 2010^x>0;\ \ln^2 2008>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă de aici că $f''(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=\ln^2 2010$.

2. a) Avem $\int\limits_1^e g(x)dx=\int\limits_1^e \dfrac{1}{x}dx=\ln e-\ln 1=1$.

b) Integrând pe $[1,e]$ identitatea dată $f(x)=g(x)-\dfrac{x}{x^2+1}$ obținem $\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\left(g(x)-\dfrac{x}{x^2+1}\right)dx=$
$=1-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^2+1}{2}\right)$.

c) Integrând inegalitatea $f(x)\leq\dfrac{1}{2x^2}$ pe $[1,e]$ obținem $\int\limits_1^e f(x)dx\leq\int\limits_1^e\dfrac{1}{2x^2}dx\ \overset{\text{cf. b)}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^2+1}{2}\right)\leq\dfrac{e-1}{2e}\Rightarrow 1-\dfrac{e-1}{2e}\leq\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^2+1}{2}\right)\Rightarrow\dfrac{e+1}{e}\leq\ln\left(\dfrac{e^2+1}{2}\right)$.
.

Soluție

1. a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = 1 \Rightarrow$ dreapta $d: y=1$ este asimptotă orizontală la G_f spre $-\infty$.

b) Avem $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)' = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$. Din tabelul de variație rezultă că $\dfrac{1}{3} \le f(x) \le 1$, $\forall x \in [0;\infty) \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le f\left(x^2\right) \le 1$ și
$\dfrac{1}{3} \le f\left(x^4\right) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{2}{3} \le f\left(x^4\right) + f\left(x^2\right) \le 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. a) Avem $\int\limits_1^e f(x)dx = \int\limits_1^e \left(x - \dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{e^2-3}{2}$.

b) O primitivă F a funcției f este convexă pe $(0,+\infty)$ $\Leftrightarrow F''(x) = f'(x) \ge 0, \forall x > 0$. Avem
$F''(x) = f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} \ge 0$, $\forall x > 0$.

c) $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - x = -g(x) \Rightarrow V\left(C_h\right) = \pi\int\limits_1^e h^2(x)dx = \pi\int\limits_1^e \left(-g(x)\right)^2 dx = \pi\int\limits_1^e g^2(x)dx = V\left(C_g\right)$.

Soluție

1. a) Avem $f'(x)=2x+e^x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(0)=2\cdot 0+e^0=1$.

b) $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(2x+e^x\right)'=2+e^x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+e^x}{e^x}=1$.

2. a) Avem $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x-x\right)dx=e-\frac{3}{2}$.

b) $\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\int_0^1\left(xe^x-x^2\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x\right)'dx-\left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\left.\left(x\cdot e^x\right)\right|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\frac{1}{3}=e-\left.\left(e^x\right)\right|_0^1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

c) $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_e^{e^2}(\ln x)'\cdot f(\ln x)dx \underset{u'(x)=\frac{1}{x}}{\overset{u(x)=\ln x}{=}} \int_e^{e^2} f(u(x))\cdot u'(x)dx=$

$\underset{\text{a funcției } f}{\overset{F \text{ primitivă}}{=}} \left.F(u(x))\right|_e^{e^2}=F\left(\ln e^2\right)-F(\ln e)=F(2)-F(1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Avem $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$; deci dreapta $d: y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la G_g.

c) Din punctul a) avem relația $f'(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Prin derivare obținem:
$f''(x)=g'(x), \forall x\in\mathbb{R}$. $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow g'(x)\geq 0,$ deci f este convexă $\Leftrightarrow g$ crescătoare.

2. a) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=g(x)\Rightarrow f$ este primitivă a lui g.

b) $\displaystyle\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx \overset{f'(x)=g(x)}{=} \int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^e=\frac{1}{2e^2}$.

c) $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln x}{x}dx=2\Rightarrow\int_1^a \ln x\cdot(\ln x)'dx=2\Rightarrow\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^a=2\Rightarrow \ln^2 a=4\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln a=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \ln a=2\Rightarrow a_1=e^2\in[1,+\infty) \\ \ln a=-2\Rightarrow a_2=e^{-2}\notin[1,+\infty) \end{cases}$. Deci $a=e^2$.

Soluție

1. a) $l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 1 \Rightarrow f$ este continuă în $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = 0$.

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (0;1) \\ \frac{1}{x}, & x \in [1;\infty) \end{cases}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Din tabelul de variație al funcției $f \Rightarrow f(x) \geq \frac{3}{4}$, $\forall x \in (0;\infty)$.

2. a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{7}{3} + 2\ln 2$.

b) $\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 x \ln x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

c) Dacă presupunem că $f(x) \leq g(x) + 3$, $\forall x \in (1;2)$, atunci $\int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 g(x)dx + 3 \Rightarrow 2\ln 2 + \frac{7}{3} \leq 2\ln 2 + \frac{11}{4}$,

fals, deci există $x_0 \in (1;2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0)$.

Soluție

1. a) $f'(x) = (x - 2\ln x)' = \frac{x-2}{x}, \forall x \geq 1$.

b) $f'(x) = \frac{x-2}{x} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1, +\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ şi crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

c) Din $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ şi monotonia funcției f obținem $f(x) \geq f\left(x^2\right)$, adică $x - 2\ln x \geq x^2 - 2\ln x^2$.

Rezultă $f(2009) \leq f(2010) \Leftrightarrow 2009 - 2\ln 2009 \leq 2010 - 2\ln 2010 \Leftrightarrow \ln\frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$.

2. a) $I_0 = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1^2}\, dx = \frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, dx \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2-1}{=}} \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|u(x)\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

c) $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2-1}\, dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}\, dx = \int_2^3 \frac{x^n\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\, dx = \int_2^3 x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2},\ \forall x>0$.

b) $f'(x)\frac{-2x-1}{x(x+1)}\le 0,\ \forall x\in(0;\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0;\infty)$.

Dacă $x\in(1;\infty)$, $\sqrt{x}<x\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)\ge f(x)\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\ge f(x)$, oricare ar fi $x\in(1;+\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$.

2. a) $I_0+I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}\right)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) $I_1=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

c) $I_n+I_{n-2}=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{x^{n-2}\left(x^2+1\right)}\right)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^n}dx=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2.$

Soluție

1. a) $f'(x) = ((x-2)\ln x)' = \ln x + \frac{x-2}{x}, \forall x > 0$.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = -1$.

c) Funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty) \Leftrightarrow (f'(x))' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Cum $f''(x) = \left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f' \nearrow$ pe $(0,+\infty)$.

2. a) Deoarece $f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}+2}{2x} = g(x), \forall x > 0$,

rezultă că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) $\int_1^4 f(x) \cdot g(x)\,dx = \int_1^4 f(x) \cdot f'(x)\,dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^4 = \frac{(2+\ln 4)^2 - 1}{2}$.

c) $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x)\,dx = \int_1^4 g(x) \cdot g'(x)\,dx = \left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^4 = -1$.

Soluție

1. a) Avem: $\left.\begin{array}{l} f_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x=1 \\ f_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\sqrt{x}\right)=1 \\ f(0)=1+\sqrt{0}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x_0=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=e^{-\infty}=0$. Deci dreapta $d: y=0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$ dacă $f''(x)<0, \forall x>0$. $f'(x)\overset{\text{pentru } x>0}{=}\left(1+\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ și

$f''(x)\overset{\text{pentru } x>0}{=}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, pentru orice $x>0$, rezultă că f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. a) Deoarece $f\left(\sqrt{x}\right)=e^{\left(\sqrt{x}\right)^2}=e^x, \forall x\geq 0 \Rightarrow \int f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int e^x\,dx=e^x+\mathcal{C}$.

b) $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}} \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}\Big|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$.

c) $f(50)=e^{x^{100}}\Rightarrow\int\limits_0^1 e^{x^{100}}\cdot x^{99}dx=\dfrac{1}{100}\int\limits_0^1 e^{u(x)}\cdot u'(x)dx=\dfrac{e-1}{100}$, unde $u(x)=x^{100}$.

Soluție

1. a) $l_s(1)=5$, $l_d(1)=0 \Rightarrow$ f nu este continuă în $x_0=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$.

c) $f\left(e^{x^n}\right)=\ln e^{x^n}=x^n \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+...+x^{2009}}{x^{2009}}=1.$

2. a) F funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=e^x+x^2+2x \Rightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow F$ primitivă.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^1=\frac{3e+1}{3}$.

c) $h(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$; $h(x)>0$ oricare ar fi $x>0$; Aria$\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$.

Soluție

1. **a)** $l_s(4)=4a-6$, $l_d(4)=2$ şi $f(4)=2 \Rightarrow 4a-6=2 \Rightarrow a=2$.

b) Pentru $x>4$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9)=\dfrac{1}{6}$.

c) $f(9)=3 \Rightarrow A\in G_f \Rightarrow$ ecuația tangentei este: $y-f(9)=f'(9)(x-9)$ adică $y-3=\dfrac{1}{6}(x-9)$.

2. **a)** $f_1(x)=\int_0^x dt=x$.

b) $\int_1^e f_1(x)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=\left(\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$.

c) $g(x)=f_2(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow V=\pi\int_0^1 \dfrac{x^4}{4}\,dx=\dfrac{\pi}{20}$.

Soluție:

1.a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x-2}{6x-4}=\frac{4}{2}=2$.

b) $f'(x)=4x^3-12x+18$; $f''(x)=12x^2-12$; $f''(x)=0\Rightarrow x_1=1$, $x_2=-1$.

Tabelul de variație pentru $f''\Rightarrow$ funcția f este concavă pe intervalul $(-1,1)$ și convexă pe intervalele $(-\infty,-1)$ și $(1,\infty)$.

c) $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$; g continuă pe $(0,\infty)$; $g(x)=0\Rightarrow x=1$ și $g\left(\frac{1}{e}\right)>0$, $g(e)=\left(e^2-1\right)\cdot\ln e>0$.

Din tabelul de variație pentru $g\Rightarrow g$ pozitivă pe tot domeniul de definiție, cu excepția $g(1)=0$.

2.a) $l_s(0)=l_d(0)=1=f(0)\Rightarrow f$ continuă în $x=0\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\left(\ln(x+1)-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=\ln 2-\frac{2}{3}$.

c) $g(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}-x\right)\cdot(-x)=\frac{x^4+x^2-x}{x^2+1}\geq 0$ pentru $x\geq 1\Rightarrow$ Aria $\left(\Gamma_g\right)=\int_1^2\left(\frac{-x}{x^2+1}+x^2\right)dx=$

$=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$

Soluție

1.a) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$ și $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}\Rightarrow g'(2)=0$.

b) $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ și din tabelul de variație al funcției $f\Rightarrow x=0$ este punct de minim al funcției *f*.

c) Din tabelul de variație al funcției *f*, $f(x)\geq -1$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -f(x)\leq 1$. Din tabelul de variație al funcției *g*, $g(x)\leq\frac{1}{e^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)-f(x)\leq 1+\frac{1}{e^2}$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln 2$.

b) $\int_0^1 g(x)dx=\left(x+\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_0^1=1+\ln 2$.

c) Presupunem că nu există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)\leq g(x_0)-2x_0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 g(x)dx-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln 2>1+\ln 2$, fals, deci există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)\leq g(x_0)$.

Soluție

1.a) $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(3^x + 1\right) = 4,\ f(1) = 4,\ \ l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (ax+2) = a+2$; $l_s = l_d = f(1) \Leftrightarrow a+2 = 4 \Rightarrow a = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3^x \cdot x\right) = 0$.

2.a) $F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$.

b) $F'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}$. Tabelul de variație pentru $F' \Rightarrow F$ descrescătoare.

c) $F(0) = \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{1}{6}$ și F descrescătoare $\Rightarrow \frac{1}{6} \le F(x) \le \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{6}\, dx \le \int_0^1 F(x)\, dx \le \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx.$

Soluție

1.a) $f'(x) = e^x - 1$.

b) $f''(x) = e^x \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$ Din tabelul de variație rezultă că f este crescătoare pe $[1;\infty)$.

$\sqrt{2009} \le \sqrt{2010} \Rightarrow f\left(\sqrt{2009}\right) \le f\left(\sqrt{2010}\right)$

2.a) $\int\limits_0^2 (x+1)\, f(x)\, dx = \int\limits_0^2 x^3\, dx = 4.$

b) $\int\limits_0^1 g(x)\, dx = \int\limits_0^1 f''(x)\, dx = f'(x)\Big|_0^1 ;\ f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \int\limits_0^1 g(x)\, dx = \dfrac{5}{4}$.

c) $\int g(x)\, dx = \int f''(x)\, dx = f'(x) + c = 2x - 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \mathcal{C}.$ O primitivă este de forma

$G : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ G(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} + c\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \infty\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = 2\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(G(x) - 2x\right) = -1 + c \Rightarrow$

$-1 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow G(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} + 1$.

Soluție

1.a) $f'(x) = e^x - e$.

b) $f''(x) = e^x$; $f''(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Ecuația tangentei $y - f(0) = f'(0)(x-0)$; $f'(0) = 1-e$; $y = (1-e)x$; $\begin{cases} y = (1-e)x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1-e \Rightarrow A(1, 1-e)$.

2.a) $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right) dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_0^1 = \frac{11}{12}$.

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \Leftrightarrow F(b) - F(a) = F(c) - F(b) \Leftrightarrow 2F(b) = F(c) + F(a) \Leftrightarrow F(b) = \frac{F(c) + F(a)}{2}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$.Din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow$ pe intervalul $(0;1]$ f este descrescătoare, iar pe intervalul $[1;\infty)$ f este crescătoare.

c) Din punctul **b)** $\Rightarrow f(x)\geq f(1)=1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty) \Leftrightarrow x-\ln x\geq 1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty) \Leftrightarrow$ $x\geq \ln x+1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$ pentru $x\in(0,\infty)\Rightarrow \sqrt{x}\in(0,\infty)\Rightarrow \sqrt{x}\geq \ln\sqrt{x}+1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2.a) $\int\limits_0^x \left(t^2+t+1\right)\,dt=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \left(t^2+t+1\right)\,dt}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}$.

b) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx=\dfrac{-1}{x}+\mathcal{C}$; $F(1)=0\Leftrightarrow -1+\mathcal{C}=0\Leftrightarrow \mathcal{C}=1\Rightarrow F(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

c) $V=\pi\int\limits_0^1 a^2x^4\,dx=\pi\dfrac{a^2}{5}=5\pi \;\Rightarrow\; a=5$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)$; $f'(-1)=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2.a) $\int_0^1 e^{-x}\cdot x\cdot e^x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\dfrac{1}{2}$.

b) $I_1=\int_0^1 xe^x\,dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big|_0^1=1$.

c) $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx=x^n e^x\Big|_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}e^x\,dx=e-nI_{n-1} \Rightarrow I_n+nI_{n-1}=e$.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=1 \Rightarrow f$ nu este continuă în $x=1$.

b) $g'(x)=6x^2-30x+24$.

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2a\cdot 2\sqrt{a}=4a\sqrt{a}$; $4a\sqrt{a}=32 \Leftrightarrow a\sqrt{a}=8 \Leftrightarrow a^3=64 \Leftrightarrow a=4$.

2.a) $\int\limits_1^2 f_0(x)\,dx=\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx=\ln 2$.

b) $f_n(x)>0$ oricare ar fi $x\in[1,2] \Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_{f_n}\right)=\int\limits_1^2 f_n(x)\,dx=\left[\ln x+\ln(x+1)+\ldots+\ln(x+n)\right]\Big|_1^2$

$=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ldots+\ln(n+2)-\ln 1-\ln 2-\ldots-\ln(1+n)=\ln(n+2)$.

c) $F'(x)=f_1(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$; $G'(x)=F'(x)-\frac{5}{6}=\frac{-5x^2+7x+6}{6x(x+1)}$. Din tabelul de variație $\Rightarrow G'(x)\ge 0$ oricare ar fi $x\in[1,2] \Rightarrow G$ crescătoare.

Soluție

1.a) $f'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = 7\ln 2$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ și din tabelul de variație al funcției $f \Rightarrow x = 0$ este punct de minim.

2.a) $\int f(x)\,dx = e^x + \mathcal{C}$.

b) $V = \pi\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\,dx = \pi\int_0^1 t\,dt = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $\int_1^3 \dfrac{1}{x(x+2)}\,dx = \int_1^3 \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+2)\right)\Big|_1^3 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{-4}{(x-3)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=-4$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală.

2.a) $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) $V=\pi\int_0^2 \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx=\pi\cdot\dfrac{-1}{x+1}\Big|_0^2=\pi\left(\dfrac{-1}{3}+1\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

c) $a\le x\le a+1 \Leftrightarrow a+1\le x+1\le a+2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2}\le\dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{1}{a+1} \Rightarrow \int_a^{a+1}\dfrac{1}{a+2}\,dx\le\int_a^{a+1} f(x)\,dx\le\int_a^{a+1}\dfrac{1}{a+1}\,dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2}\cdot x\Big|_a^{a+1}\le\int_a^{a+1} f(x)\,dx\le\dfrac{1}{a+1}\cdot x\Big|_a^{a+1}$.

Soluție

1.a) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

b) $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in [1, \infty) \Rightarrow f$ crescătoare pe $[1, \infty)$.

c) $f(1) = e \Rightarrow A(1, e) \in G_f$; ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$; $f(1) = e$; $f'(1) = e+1$;
$y - e = (1+e)(x-1)$.

2.a) $l_s(-1) = l_d(-1) = f(-1) = 4 \Rightarrow f$ continuă în $x = -1 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_{-3}^{-2} (x+5)\, dx = \frac{5}{2}$.

c) Pentru $x > -1$, $f(x) > 0 \Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right) = \int_m^{m+1} f(x)\, dx = \int_m^{m+1} \left(3x^2 + 1\right) dx = 3m^2 + 3m + 2$; aria minimă este
$= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

Soluție

1.a) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1.$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; $h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$ oricare ar fi $x\in[0,\infty)\Rightarrow h$ crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

2.a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}+1=\dfrac{(x+3)-(x+1)+(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3}=f(x)\Rightarrow\int\limits_0^1\left(x^2+4x+5\right)dx=\dfrac{22}{3}.$

b) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\left(\ln\dfrac{x+1}{x+3}+x\right)\Bigg|_0^1=\ln\dfrac{3}{2}+1$.

c) $f(x)>0$ oricare ar fi $x\geq 0\Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right)=\int\limits_0^k f(x)\,dx=\left(\ln\dfrac{x+1}{x+3}+x\right)\Bigg|_0^k=\ln\left(\dfrac{k+1}{k+3}\cdot\dfrac{3}{1}\right)+k=k+\ln k$

$\Rightarrow\dfrac{3k+3}{k+3}=k\Leftrightarrow 3k+3=k^2+3k\Rightarrow k=\sqrt{3}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

b) Tabelul de variație al funcției $f \Rightarrow$ $x=-1$ minim local , $x=1$ maxim local.

c) Din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow f(x)\geq -1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2.a) $\int_0^1 f(x)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1=\dfrac{5}{2}$.

b) $\int_0^1 e^x(x+2)\,dx=e^x(x+2)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e^x(x+1)\Big|_0^1=2e-1$.

c) $V=\pi\int_0^1(px+2)^2\,dx=\pi\int_0^1\left(p^2x^2+4px+4\right)dx=\pi\left(p^2\cdot\dfrac{x^3}{3}+4p\cdot\dfrac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\dfrac{p^2}{3}+2p+4\right)$.

Volumul este minim pentru $p=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-2}{2\cdot\frac{1}{3}}=-3$.

Soluție

1.a) $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow f$ este continuă în $x_0 = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+2} = 2 \Rightarrow y = 2$ este ecuația asimptotei orizontale.

c) Pentru $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow f$ crescătoare; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = \frac{3}{2}$.

2.a) $\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$; $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $\frac{x}{x+1} \leq 1$ pentru $x \in [0,1] \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx \leq \int\limits_0^1 dx = 1$.

c) $\int\limits_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln a \quad \Rightarrow \ln a, \ln b, \ln c$ în progresie aritmetică $\Leftrightarrow \ln b = \frac{\ln a + \ln c}{2}$

$\Leftrightarrow 2\ln b = \ln(a \cdot c) \Leftrightarrow b^2 = a\,c \Leftrightarrow a, b, c$ în progresie geometrică.

Soluție

1.a) $f'(x)-g'(x)=\left(3x^2-6x\right)-\left(3x^2-10x+8\right)=4x-8.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{3x^2-10x+8}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x-6}{6x-10}=3.$

c) $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(x)=0\Rightarrow 3x(x-2)=0$, de unde $x=0$, $x=2$. Din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2.a) $F'(x)=e^x+1-\frac{1}{x}=e^x+\frac{x-1}{x}=f(x)$. F derivabilă pe $(0,\infty)\Rightarrow F$ primitivă .

b) $\int\limits_1^2 xe^x\,dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big|_1^2=e^2.$

c) Pentru $x\in[1\,,\,e]$, $f(x)>0\Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right)=\int\limits_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big|_1^e=e^e-2.$ $e^e-2=e^m-2\Leftrightarrow m=e$.

Soluţie

1.a) $f'(x)=3x^2+3$.

b) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x}{x^3}=1$.

2.a) $l_s(1)=-2=l_d(1)=f(1) \Rightarrow f$ continuă în $x=1 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx=\int_0^1 (x+1)\,dx=\frac{3}{2}$.

c) $\int_1^x \left(f(t)+2\right)dt=\int_1^x \ln t\,dt=x(\ln x-1)+1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x-1)+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\frac{1}{x}+x.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2.$

c) $f''(x)=\frac{-1+x^2}{x^2}$; $f''(x)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-1\notin(0;+\infty)$. Din tabelul de variație $\Rightarrow$ pentru $x\in(0,1)$ f este concavă; pentru $x\in(1,\infty)$ f este convexă.

2.a) Pentru $n=2\Rightarrow\int_1^2(1+x)^2\,dx=\left.\frac{(1+x)^3}{3}\right|_1^2=\frac{19}{3}$.

b) Pentru $n=-1\Rightarrow\int_0^a(1+x)^{-1}\,dx=\ln|1+x|\Big|_0^a=0\Leftrightarrow|1+a|=1\Rightarrow a_1=0, a_2=-2\notin[0,+\infty)$. Deci $a=0$.

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{2}(1+x)^{2n}\Big|_0^1=\frac{2^{2n}}{2}-\frac{1}{2}.$

Soluție

1.a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x > 0 \Rightarrow f$ crescătoare.

c) $f'(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$; $f(1) = 2 \Rightarrow A(1, 2)$.

2.a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = f(x) \Rightarrow \int (x+1)(x+2) f(x) dx = x^2 + 3x + \mathcal{C}$.

b) $\int_0^1 f(x)\, dx = \ln\left[(x+1)\cdot(x+2)\right]\Big|_0^1 = \ln 3$.

c) $h(x) = -\frac{1}{x+3} \Rightarrow V = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\, dx = \pi \cdot \frac{-1}{x+3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$.

Soluție

1.a) Avem $f_1(x) = f_0'(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) $f_2(x) = f_1'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală.

c) $f_0(x) \le \dfrac{1}{f_1(x)} - 1 \Leftrightarrow \ln x \le x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \le -1$. Ataşăm funcția $h(x) = \ln x - x$, $x \in (0,\infty)$;

$h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Din tabelul de variație $\Rightarrow h(x) \le -1$, $\forall\ x \in (0,\infty) \Leftrightarrow \ln x - x \le -1$.

2.a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx = \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{e-1}} = 1$.

b) F primitivă $\Rightarrow F'(x) = f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $F'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0,\infty) \Rightarrow F$ crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \ln 5; \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx = \ln\frac{17}{5}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0.$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-1.$ Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pe $[1;\infty)$ și f descrescătoare pe $[-1;0)$ și pe $(0;1]$.

2.a) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=\pi\left.\left(\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=\dfrac{7\pi}{15}$.

b) $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_2^1 -\dfrac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\int_1^2 \dfrac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}.$

c) $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției f,

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluție

1.a) $l_s(1) = l_d(1) = f(1)$; $l_s(1) = 2$; $l_d(1) = \frac{2+a}{3}$ şi $f(1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2+a}{3} \Rightarrow a = 4$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală.

c) $m = f'(2) = 1$; $f'(x) = \frac{-2x^2 - 2ax + 4}{\left(x^2+2\right)^2}$; $f'(2) = \frac{-4-4a}{36}$; $\frac{-4-4a}{36} = 1 \Rightarrow a = -10$.

2.a) $f\left(\sqrt{x}\right) = e^x \Rightarrow \int_0^1 e^x\,dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$.

b) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt = \frac{1}{2}(e-1)$.

c) $1 \le e^{x^2} \le e$, oricare ar fi $x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 1\,dx \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le \int_0^1 e\,dx \Rightarrow 1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le e$.

Soluție

1.a) $h(x)=\dfrac{(x-2)+(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

b) $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0\Rightarrow$ h este descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty;1),(1;2),(2;\infty)$.

c) $h'(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ și $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'<0\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2\geq f(x)\cdot f''(x)$.

2.a) $V=\pi\int\limits_1^3 x^2dx=\pi\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^3=\pi\left(9-\dfrac{1}{3}\right)=\pi\cdot\dfrac{26}{3}$.

b) $\int f(x)dx=\dfrac{x^{2010}}{2010}+\dfrac{x^2}{2}+x+\mathcal{C};\ F(0)=1\Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^{2010}}{2010}+\dfrac{x^2}{2}+x+1$.

c) $\int\limits_0^x f(t)\,dt=\dfrac{x^{2010}}{2010}+\dfrac{x^2}{2}+x\ \Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x^{2010}}=\dfrac{1}{2010}$.

Soluție

1.a) f continuă $\Leftrightarrow$ $l_s(0)=l_d(0)=f(0)$; $l_s(0)=1=f(0)$, $l_d(0)=1$ $\Rightarrow$ f este continuă în $x=0$.

b) $x\in(-\infty,0]$; $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)\geq 0$ oricare ar fi $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ crescătoare pe $(-\infty\,,\,0]$.

c) $f(-1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A\in G_f$; ecuația tangentei: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$; $f'(-1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$.

2.a) $f_1\left(\sqrt{x-1}\right)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$.

b) $f_2(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow g(x)=\left(x^2+1\right)^2=x^4+2x^2+1$; $\displaystyle\int g(x)\,dx=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+\mathcal{C}$. O primitivă este

$G(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x+k$; $G(1)=\dfrac{13}{15}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}+1+k=\dfrac{13}{15}\Leftrightarrow k=-1\Rightarrow G(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x-1$.

c) $\displaystyle\int_0^1 x\,f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^2=\frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

b) $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;\infty)\Rightarrow f$ crescătoare pe $(0;\infty)\Rightarrow f(2010)\leq f(2011)\Leftrightarrow 2009\sqrt{2011}\leq 2010\sqrt{2010}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=\infty$, deci nu există asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}=0$, deci nu există asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. a) *f* este continuă pe $(-\infty;1)$ şi pe $(1;\infty)$. $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0$, deci *f* este continuă şi în $x_0=1$, adică *f* este continuă pe $\mathbb{R}$ adică admite primitive.

b) $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1(x^2+x-2)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1=-\dfrac{7}{6}$.

c) $h(x)=\ln x;\ V=\pi\int\limits_1^e \ln^2 x dx=\pi x\ln^2 x\Big|_1^e-\pi\int\limits_1^e 2\ln x dx=\pi(e-2)$.

Soluții

1. a) $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-3}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = -2$

c) $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} > 0$**,** pentru orice $x > 0$, deci f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. a) $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci F este primitivă a lui *f*.

b) $F(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_F) = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x \cdot e^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1.$

c) $\int_0^1 \dfrac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx = -\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx = -\ln\left(e^x + 1\right)\Big|_0^1 = \ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right).$

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, deci $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Derivata funcției f este pozitivă pe intervalul $(0,+\infty)$ rezultă că f este crescătoare pe $(0,+\infty)$ deci $f\left(\sqrt[3]{2008}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2009}\right)$.

2. a) $\int f(x)dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\mathcal{C}$.

b) $g(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_g\right)=\int\limits_0^1 x\cdot e^x dx=(x-1)\cdot e^x\Big|_0^1=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Soluții

1. a) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

c) $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$**,** deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (x+1) f_2(x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{24}$.

b) $f_1(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_{f_1}\right) = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \left(x - \ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$.

c) $\frac{x^{2009}}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$ deci $\int\limits_0^1 f_{2009}(x)\, dx \leq \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=1$, deci $y=x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) Din tabelul de variație $f(x)\geq 4,\ \forall x\in(1;\infty)$.

2. a) $\int f_0(x)dx=\int\frac{e^x}{2}dx=\frac{e^x}{2}+\mathcal{C}$.

b) $f_1(x)>0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_{f_1}\right)=\int\limits_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

c) Din $e^{(n+1)x}\geq e^{nx}>0$, pentru orice $x\in[0,1]$, se obține $\frac{e^x}{e^{(n+1)x}+1}\leq\frac{e^x}{e^{nx}+1}$ pentru orice $x\in[0,1]$, de unde $\int\limits_0^1 f_{n+1}(x)dx\leq\int\limits_0^1 f_n(x)dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **,** pentru orice $x>0$ **.**

b) Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-1$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se deduce că f este descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, de unde rezultă că $f(x)\geq f(1)=-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. a) $F'(x)=2x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $a=2$.

b) $\int_0^1 e^x\cdot f_1(x)dx=xe^x\Big|_0^1=e$.

c) $\int_0^1 f_a{}^2(x)dx=\int_0^1\left(a^2x^2+2ax+1\right)dx=\left(a^2\frac{x^3}{3}+ax^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\geq\frac{1}{4}$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Soluții

1 a) $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$.

b) $d: y-f(1)=f'(1)(x-1)$, $d: y=-2$.

c) Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq f(1)=-2$ pentru orice $x>0$, de unde $x-3\geq -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ pentru orice $x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f_1(x)dx=\int e^x dx=e^x+\mathcal{C}$.

b) $\int_0^1 x\cdot f_1(x)dx=\int_0^1 x\cdot e^x dx=(x-1)e^x\Big|_0^1=1$.

c) $V=\pi\int_0^1 x^2\cdot e^{2x^3}dx=\dfrac{\pi}{6}e^{2x^3}\Big|_0^1=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{6}$.

Soluții

1. a) $f'(x) = 3^x \ln 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \ln 6$.

c) $f'(x) = 3^x \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \ln x + \mathcal{C}$.

b) $V = \pi\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{29\pi}{6}$.

c) $\int_1^e f(x)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e + \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2+3}{4}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Din semnul derivatei lui f obținem că f este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ şi crescătoare pe $[1,2]$ deci $f(x)\geq f(1)=\dfrac{1}{e}$, pentru orice $x\leq 2$.

2. a) $\int f^2(x)dx=\int(x+2)dx=\dfrac{x^2}{2}+2x+\mathcal{C}$.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_f)=\int_0^1\sqrt{x+2}\,dx=\dfrac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3}\Big|_0^1=\dfrac{2(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{3}$.

c) $\int_0^1 x^{2009}\sqrt{x+2}\,dx\leq\int_0^1 x^{2009}\sqrt{3}\,dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2010}$.

Soluții

1. a) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2+1)}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$ deci $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$, pentru orice $x > 0$, deci f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. a) $\int f(x)dx = e^x + \mathcal{C}$.

b) $h(x) = xe^x \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_h) = \int\limits_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1$.

c) $V = \pi\int\limits_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \pi\left(\dfrac{e^{2x}}{2} + 2x - \dfrac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\dfrac{e^2}{2} + 2 - \dfrac{1}{2e^2}\right)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$

b) Ecuația tangentei este $y-f(e)=f'(e)(x-e)$, adică $y=\dfrac{1}{e}$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este crescătoare pe $(0,e]$ şi descrescătoare pe $[e,+\infty)$, deci $f(x)\le f(e)=\dfrac{1}{e}$, pentru orice $x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f(x)dx=x-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{4x\sqrt{x}}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$.

c) $\int_0^1 f^{2009}(x)dx\le\int_0^1(1-x)^{2009}dx=\dfrac{-(x-1)^{2010}}{2010}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2010}$.

Soluții

1. a) $f'(x) = (2x+2)\cdot e^x + (x^2+2x+1)\cdot e^x = (x+1)(x+3)\cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuația asiptotei orizontale la G_f către $-\infty$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-3; -1\}$. Din tabelul de variație al funcției obținem $f(x) \le f(-3) = \frac{4}{e^3},\ \forall x \le -1$.

Deci $f(-2) + f(-4) \le \frac{8}{e^3}$.

2. a) f continuă pe $(-\infty; 1)$ şi pe $(1; \infty)$; $l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 0 \Rightarrow f$ continuă şi în $x_0 = 1 \Rightarrow f$ admite primitive.

b) Fie F o primitivă a funcției *f*. *F* este convexă pe $(1; \infty) \Leftrightarrow F''(x) = f'(x) = \frac{1}{x} > 0,\ \forall x > 1$, inegalitate adevărată.

c) $\int_0^e f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx + \int_1^e \ln x dx = \frac{11}{6}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(1)=0$.

b) $f''(x)=6x$ şi atunci f este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,+\infty)$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$, descrescătoare pe $[-1,1]$ şi crescătoare pe $[1,2]$ şi cum $f(-1)=f(2)=3$ rezultă $f(x)\le 3$, pentru orice $x\le 2$.

2. a) $F'(x)=1-\frac{1}{x^2}=f(x)$ pentru orice $x>0$.

b) $f(x)>0,\ \forall x\in[1;2]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_f\right)=\int_1^2 f(x)dx=F(x)\Big|_1^2=\frac{1}{2}$.

c) $\int_1^e F(x)\cdot\ln x dx=\int_1^e\left(x\ln x+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e+\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+3}{4}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=6x^2-6x$, $f'(1)=0$.

b) $f''(x)=12x-6$ şi din semnul derivatei a doua se obține că f este concavă pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ şi convexă pe $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se obține că f este crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},0\right]$, descrescătoare pe $[0;1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$ şi cum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$ rezultă $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

2. a) $\int f(x)dx=e^x+\mathcal{C}$.

b) $h(x)=xe^x\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_h)=\int_0^1 x\cdot e^x dx=(x-1)\cdot e^x\Big|_0^1=1$.

c) $1-x\geq x$, pentru orice $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, deci $e^{1-x}-e^x\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, de unde $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

b) Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se deduce că f este descrescătoare pe $[0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)=2$, $\forall x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f_2(x)dx=\int\left(2x^2-2x+1\right)dx=\frac{2x^3}{3}-x^2+x+\mathcal{C}$.

b) $e^x f_2(x)=\left[x^2+(1-x)^2\right]\cdot e^x\ge 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ Aria $=\int_0^1\left(2x^2-2x+1\right)e^x dx=\left(2x^2-6x+7\right)e^x\Big|_0^1=3e-7$.

c) $x^n\ge x^{n+1}$ şi $(1-x)^n\ge(1-x)^{n+1}$ pentru orice $x\in[0,1]$, de unde, prin însumare şi integrare se obține că $\int_0^1 f_n(x)dx\ge\int_0^1 f_{n+1}(x)dx$.

Soluții

1. a) $f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}$, pentru orice $x>0$.

b) $f''(x)=2+\frac{1}{x^2}>0$, pentru orice $x>0$, deci f este convexă pe $(0,+\infty)$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se deduce că f este descrescătoare pe $(0;1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(1)=0$, pentru orice $x>0$.

2. a) $\int f_1(x)dx=\int(2-x)dx=2x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$.

b) $g(x)=(2-x)\cdot e^x\geq 0,\ \forall x\in[0;2]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_g)=\int_0^2(2-x)\cdot e^x dx=(3-x)e^x\Big|_0^2=e^2-3$.

c) $V=\pi\int_0^2(2-x)^{10}dx=-\frac{\pi(2-x)^{11}}{11}\Big|_0^2=\frac{2^{11}\pi}{11}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, deci $x=0$ este asimptotă verticală.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(1)=e$, pentru orice $x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f(x)dx=\dfrac{x^2}{2}+2\ln x+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int_1^2\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2 dx=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+4x-\dfrac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{25\pi}{3}$

c) $\int_1^2 f(x)\ln x dx=\int_1^2 x\cdot\ln x dx+\int_1^2\dfrac{2}{x}\ln x dx=\left(\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\ln^2 x\right)\Bigg|_1^2=\ln^2 2+2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=2xe^x+\left(x^2+1\right)e^x=(x+1)^2e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Ecuația tangentei $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}}=-1\Rightarrow y=-1$ este ecuația asimptotei orizontale la G_f spre $-\infty$.

2. a) $\int f_1(x)\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\frac{\pi(2\ln 2-1)}{2}$.

c) $\int_0^1\frac{x^{2009}}{\sqrt{x+1}}dx\le\int_0^1x^{2009}dx=\frac{1}{2010}$.

Soluții

1. a) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) $f''(x) = (x+2) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi din semnul derivatei a doua se obține că f este concavă pe $(-\infty, -2]$ şi convexă pe $[-2, +\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{e^{-x}}\right) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

2. a) $\int x \cdot f_1(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + \mathcal{C}$.

b) $\int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \dfrac{2}{x+1}\right)dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2} + 2\ln 2$.

c) Din $0 \le \dfrac{x^{2009} + x + 2}{x+1} \le \dfrac{2x+2}{x+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$ se obține $\text{Aria}\left(\Gamma_{f_{2009}}\right) = \int_0^1 f_{2009}(x)\,dx \le \int_0^1 2\,dx$,

adică $\text{Aria}\left(\Gamma_{f_{2009}}\right) \le 2$.

Soluții

1. a) $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = 1$, deci $y = x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $(1,2]$ şi atunci $f\left(\sqrt[3]{2}\right) \geq f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. a) $\int f(x)dx = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{C}$.

b) $g(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_g\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x}dx = -\int\limits_0^1 (1-x)' \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} f(x) \cdot \ln x dx = \left(\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)\ln x - x + \dfrac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} = \dfrac{-3e^2+8e-3}{4e^2}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$ și atunci f este descrescătoare pe $[e,+\infty)$, deci $f(2008)\ge f(2009)$.

2. a) $\int f(x)dx=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$.

b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ge 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_g)=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\dfrac{\ln 2}{2}$.

c) $V=\pi\int_0^1 x\cdot e^x dx=\pi(x-1)\cdot e^x\Big|_0^1=\pi$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, deci $y=1$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

c) Din studiul semnului derivatei lui *f* se obține că *f* este crescătoare pe $[1,+\infty)$ deci $f\left(\sqrt[3]{2009}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2010}\right)$.

2. a) $\int f'(x)dx=\ln x+\mathcal{C}$.

b) $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[1;e]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_f\right)=\int_1^e \ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e=1$.

c) $\ln x\le 1$, pentru orice $x\in[1,e]$, deci $e^x\cdot\ln x\le e^x$, pentru orice $x\in[1,e]$ și atunci $\int_1^e e^x f(x)dx\le\int_1^e e^x=e^e-e$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ pentru orice $x>1$.

b) Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=e^2$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f rezultă că f este descrescătoare pe $(1;2]$ şi crescătoare pe $[2;+\infty)$ deci $f(x)\geq f(2)=e^2$ pentru orice $x>1$.

2. a) $\int_1^4 f_1(x)dx=\frac{2\sqrt{5}}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

b) $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x\right)\Big|_1^4=\frac{1}{2}\ln\frac{32}{5}$.

c) $V=\pi\int_1^4\frac{1}{x^2+4x}dx=\frac{\pi}{4}\int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx=\frac{\pi}{4}(\ln x-\ln(x+4))\Big|_1^4=\frac{\pi}{4}\ln\frac{5}{2}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1-3\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) $d: y-f(1)=f'(1)(x-1)$, ecuația tangentei este $y=0$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se obține că f este descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(1)=0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ de unde concluzia.

2. a) $\int_0^1 (x+1)f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1=\dfrac{1}{4}$.

b) $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\right|_0^1=\dfrac{5}{6}-\ln 2$.

c) Din $1\leq(x+1)^2\leq 4$ se obține $\dfrac{x^6}{4}\leq\dfrac{x^6}{(x+1)^2}\leq x^6$, pentru orice $x\in[0,1]$ şi atunci $V=\pi\int_0^1\dfrac{x^6}{(x+1)^2}dx\in\left[\dfrac{\pi}{28},\dfrac{\pi}{7}\right]$.

Soluții

1. a) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = 0$ deci $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$, pentru orice $x > 0$, deci f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. a) $\int f_0(x) \cdot e^{-x}\, dx = \dfrac{x^2}{2} + x + \mathcal{C}$.

b) $f_1(x) = \left(x^2 + 1\right)e^x \ge 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_{f_1}\right) = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x dx = \left(x^2 - 2x + 3\right) \cdot e^x \Big|_0^1 = 2e - 3$.

c) $\int_0^1 f_{2008}(x)\, dx + \int_0^1 f_{2010}(x)\, dx = \int_0^1 \left(x^{2009}\left(1 + x^2\right) + 2\right) \cdot e^x dx \ge \int_0^1 \left(x^{2009} \cdot 2x + 2\right) \cdot e^x dx = 2\int_0^1 f_{2009}(x)\, dx$.